SAMMLUNG
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHER LEHRBÜCHER
HERAUSGEGEBEN VON E. TREFFTZ

25

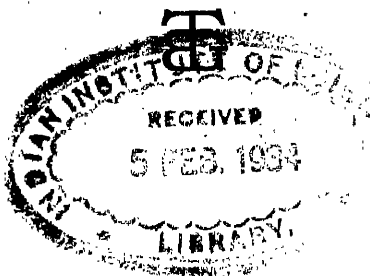
INTEGRALGLEICHUNGEN

UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG
DER ANWENDUNGEN

VON

DR. G. WIARDA
A. O. PROFESSOR AN DER TECHN. HOCHSCHULE
DRESDEN

MIT 8 FIGUREN IM TEXT



1930
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

Vorwort.

Das vorliegende Buch soll eine möglichst einfache Einführung in die Theorie der Integralgleichungen bringen, welche von Anfang an auf die technisch und physikalisch bedeutsamen Anwendungen abzielt. Daher steht in mathematischer Beziehung die Schmidtsche Theorie im Vordergrunde, die sich auf der Grundlage der mathematischen Vorbildung der Studenten Technischer Hochschulen am einfachsten entwickeln läßt. Das Ziel dieses Büchleins ist erreicht, wenn es dem Praktiker nützlich ist und dem Mathematiker Anregung gibt, sich ausführlicher mit diesem Stoffe zu beschäftigen; dazu sei auf den Encyklopädie-Artikel von O. Toeplitz und E. Hellinger (II, 3_2, Heft 9) verwiesen, in dem auch die einschlägige Literatur zusammengestellt ist.

Während der Abfassung des Manuskriptes sowie bei der Korrektur hat mich Herr Prof. Trefftz unterstützt; ich verdanke ihm viele wertvolle Ratschläge und Hinweise und spreche ihm dafür meinen herzlichsten Dank aus. Ebenso habe ich dem Verlage für weitgehendes Entgegenkommen bestens zu danken.

Dresden, im Februar 1930.

G. Wiarda.

Inhalt.

Einleitung.

Die Bezeichnung *Integralgleichungen* läßt uns sofort an den Begriff der Differentialgleichungen denken. Während bei diesen eine unbekannte Funktion mit bekannten, gegebenen Funktionen durch Differentialoperationen verknüpft ist, wird bei den Integralgleichungen die unbekannte Funktion wesentlich in Integralverbindungen auftreten. Im Vordergrunde des Interesses stehen, wie bei den Differentialgleichungen, die linearen Fälle; in diesen tritt, ebenso wie in den linearen Differentialgleichungen, die unbekannte Funktion nur in linearen Verbindungen mit anderen, gegebenen Funktionen auf. Demgemäß verstehen wir unter Integralgleichungen im folgenden Gleichungen von einer dieser Formen:

(1) $$g(s) = \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt$$ oder

(2) $$f(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt.$$

Daß wir hier die Variabeln mit s und t bezeichnen, geschieht lediglich aus historischen Gründen. Mit $\eta(s)$ bezeichnen wir stets die unbekannte Funktion oder die Lösung, die es zu ermitteln gilt, während $g(s)$ bzw. $f(s)$ und der *Kern* $K(s, t)$ gegebene Funktionen in einem gegebenen Grundintervalle $a \dots b$ sind; es ist also

(3) $$a \leqq s \leqq b \quad \text{und} \quad a \leqq t \leqq b.$$

Die Gleichungen sind so aufzufassen, daß (1) bzw. (2) identisch in s, d. h. für alle s des Intervalles $a \dots b$ befriedigt werden sollen. Genauer wollen wir gleich hier zu Anfang folgende Definition festlegen:

Def.: Eine Gleichung von der Form (1) heißt eine lineare Integralgleichung erster Art, (2) eine solche zweiter Art. $g(s)$ bzw. $f(s)$ nennen wir die freie Funktion der Integralgleichung, $K(s,t)$ den Kern derselben. Freie Funktion und Kern sind gegebene Funktionen ihrer

Argumente in dem Bereiche (3), während $\eta(s)$ gesucht wird, und zwar so, daß (1) bzw. (2) identisch für $a \leqq s \leqq b$ erfüllt ist. Der Faktor λ vor dem Integrale heißt der Parameter der Integralgleichung zweiter Art. Wenn in (2) speziell $f(s) \equiv 0$ ist, nennen wir (2) eine homogene Integralgleichung zweiter Art, anderenfalls eine inhomogene.

Die Bedeutung des Parameters wird sich später herausstellen.

Daß die linearen Integralgleichungen gegenüber den allgemeinen eine bevorzugte Stellung einnehmen, läßt sich leicht verstehen. Ersetzen wir nämlich in einer beliebigen Integralgleichung in bekannter Weise die auftretenden Integrale approximativ irgendwie durch geeignete endliche Summen und fordern dementsprechend statt der kontinuierlichen Identität in s nur das Erfülltsein für ebenso viele diskrete s-Werte, wie die Summe Glieder hat, so erkennen wir, daß eine Integralgleichung stets aufgefaßt werden kann als hervorgegangen aus einem Systeme von n Gleichungen mit n Unbekannten, wenn darin n über alle Grenzen wächst. Diejenigen Gleichungssysteme aber, die wir am besten beherrschen, sind die linearen. Es hat demgemäß vor allem eine Theorie der linearen Integralgleichungen Aussicht auf Erfolg, wenn anders man nicht besondere einschränkende Voraussetzungen machen oder sich auf Aussagen sehr allgemeiner Natur beschränken will.

Von den beiden obengenannten Typen werden uns in der Hauptsache die Integralgleichungen zweiter Art näher beschäftigen, und zwar deshalb, weil sie — wie hier vorweggenommen sei — abgesehen von gewissen Ausnahmewerten des Parameters λ stets eine Lösung besitzen, während das bei den Integralgleichungen erster Art durchaus nicht immer der Fall ist. Dieses unterschiedliche Verhalten der Integralgleichungen erster Art und zweiter Art ist bei näherem Zusehen nicht überraschend; wenigstens können wir uns leicht klarmachen, daß die Gleichungen erster Art i. a. keine Lösung besitzen werden. Denn wir werden naturgemäß für die Lösungsfunktion $\eta(t)$ keine engeren Einschränkungen fordern als für die gegebenen Funktionen; mit anderen Worten, wir werden die gesuchte und die gegebenen Funktionen als zu derselben Klasse gehörig ansehen, z. B. zur Klasse der stetigen Funktionen oder der streckenweise stetigen Funktionen mit endlichen Sprungstellen usw. Nun tritt aber bei den Integralgleichungen erster Art — und das ist gerade das Typische für diese — die gesuchte Funktion $\eta(s)$ einzig und allein unter dem Integrale auf. Die Integraloperation aber wirkt in gewisser Weise planierend, insofern, als i. a. die Klasse der durch

$$\int_a^b K(s, t)\,\eta(t)\,dt = J(s) \tag{4}$$

dargestellten Funktionen enger ist als die, welcher $\eta(s)$ angehört. Z. B. ist $J(s)$ sicher eine stetige Funktion, wenn $K(s, t)$ stetig, $\eta(t)$ aber nur stückweise stetig ist. Es wird somit ein besonderer Zufall sein, wenn $g(s)$ in (1) dieser engeren Klasse angehört, die durch die Integraltransformation (4) gegeben ist; oder anders ausgedrückt: Es wird zwischen $K(s, t)$ und $g(s)$ noch eine besondere Nebenbeziehung bestehen müssen, damit (1) lösbar ist.

Die Bedeutung der Integralgleichungen ist nicht nur mathematischer Natur. Vielmehr führen sehr viele Probleme der Physik, speziell der Mechanik, auf Integralgleichungen, teils unmittelbar, teils lassen sich die Differentialgleichungen, die den jeweiligen physikalischen Vorgang wiedergeben, in eine Integralgleichung überführen. Die Bedeutung unserer Theorie für die erstgenannten Fälle ist selbstverständlich; aber auch für die anderen bietet sie besondere Vorteile. Wir werden nämlich sehen, daß die Integralgleichung an die Stelle der betreffenden Differentialgleichung einschließlich der Nebenbedingungen tritt, die bei dieser noch notwendig hinzukommen müssen, wenn es sich um einen eindeutig bestimmten physikalischen Vorgang handelt. Die Integralgleichung enthält also an sich schon die sämtlichen Bestimmungsstücke des physikalischen Problemes. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß wir im wesentlichen in allen diesen Fällen auf Gleichungen derselben Gestalt, und zwar meist Integralgleichungen, wie sie oben definiert worden sind, geführt werden, während die Gestalt der Differentialgleichungen auch bei physikalisch sehr nahe verwandten Aufgaben oft sehr unterschiedlich ist. Schwingungsprobleme z. B. fordern je nach dem die Untersuchung von gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen teils zweiter, teils vierter Ordnung. Demgegenüber kommt das den verschiedenen Problemen Gemeinsame viel besser zur Geltung, wenn wir die Integralgleichungen heranziehen, wenngleich die Differentialgleichungen, im Einzelfalle namentlich, auch ihre unverkennbaren Vorzüge besitzen.

Bevor wir die mathematische Theorie selbst kennenlernen, die wir in erster Linie Fredholm, Hilbert und E. Schmidt verdanken, wollen wir im ersten Kapitel zwei physikalische Probleme betrachten, die auf Integralgleichungen führen. Damit wollen wir einerseits das soeben Angedeutete ein wenig näher erläutern; andererseits werden wir mit erhöhtem Interesse an die mathematische Schürfarbeit herangehen, wenn wir sehen: nicht die eingangs erwähnte äußerliche

Analogie zu den Differentialgleichungen läßt eine Theorie der Integralgleichungen wünschenswert erscheinen, sondern lebendige Probleme aus den Anwendungsgebieten fordern diese von dem Mathematiker. Der Mathematiker seinerseits wird dabei ebenfalls voll auf seine Kosten kommen; er wird eine Theorie kennenlernen, die mit den einfachsten Mitteln eine überraschende Fülle von schönen Sätzen und Zusammenhängen bietet.

Erstes Kapitel.

Problemstellung.

§ 1. Die schwingende Saite. — Die Durchbiegung infolge statischer Belastung.

Das Problem der schwingenden Saite, das wir in den §§ 1—5 behandeln werden, hat als Repräsentant einer großen Klasse von physikalischen Erscheinungen von jeher im Mittelpunkte des Interesses gestanden. Die Theorie der Differentialgleichungen hat aus diesem Fragenkomplexe wichtige Anregungen und Förderung erfahren. Hier wollen wir jedoch überlegen, wie das genannte Problem durch eine Integralgleichung beschrieben werden kann.

Der physikalische Vorgang, um den es sich handelt, ist folgender: Eine elastische Saite von der Länge l ist an den Enden festgehalten und durch eine Kraft S gespannt. S sei dabei so groß, daß demgegenüber die Schwerkraft der an sich schon fadenförmigen Saite vernachlässigt werden kann. Wenn weiter keine äußeren Kräfte wirken, so ist die gespannte Saite in der Ruhelage geradlinig; die dadurch gegebene Richtung wählen wir als s-Achse und legen Anfangspunkt und Richtungssinn so fest, daß die gespannte Saite von 0 bis l reicht. Zwei Hauptprobleme sind hier zu unterscheiden, die freien Schwingungen und die erzwungenen Schwingungen. Bei den freien Schwingungen ist die Saite durch eine einmalige Kraft aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht und bleibt nach Beseitigung derselben sich selbst überlassen, ohne daß äußere Kräfte wirken. Diesen Fall können wir z. B. verwirklichen, wenn wir eine Violinsaite anzupfen, oder wenn eine Saite irgendwie belastet und diese Belastung plötzlich fortgenommen wird. Zufolge ihrer elastischen Eigenschaft schnellt die Saite aus dieser ihr zuerteilten Anfangslage über die Gleichgewichtslage hinaus auf die andere Seite und wieder zurück; sie führt so Schwingungen aus. Diese werden, abgesehen von dem Einflusse der Anfangslage, nur von den spezifischen Eigenschaften der Saite bedingt sein.

Bei den erzwungenen Schwingungen haben wir dieselbe Sachlage, nur daß nach dem Freigeben der Saite noch äußere Kräfte wirken, die wir uns als periodische Funktionen der Zeit τ gegeben denken wollen. Diese periodischen Erregungskräfte werden nun bei der Saite bestimmte Schwingungen erzwingen, die natürlich außerdem noch von der Ausgangslage und der spezifischen Natur der Saite abhängen.

Wir wollen als Erstes die freien Schwingungen etwas näher untersuchen. Der Grundgedanke[1]) besteht darin, daß wir zunächst die Durchbiegung unter dem Einflusse irgendeiner Belastung ermitteln und dann, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten, das d'Alembertsche Prinzip heranziehen. Zur Vereinfachung unserer Betrachtungen wollen wir uns von vornherein auf die Untersuchung solcher Schwingungen beschränken, bei denen nur kleine Abweichungen von der Gleichgewichtslage auftreten, so daß wir alle Glieder, welche in den Verschiebungen und deren Differentialquotienten von zweiter oder höherer Ordnung sind, gegenüber den linearen Gliedern vernachlässigen können. Unter dieser Voraussetzung können wir von dem Gesetze der Superposition Gebrauch machen, welches besagt, daß die Durchbiegungen, die von zwei oder mehreren Belastungen herrühren, sich einfach addieren.

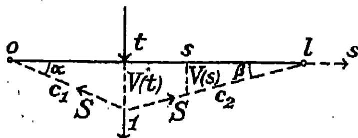


Fig. 1.

Lassen wir nur an der Stelle t der s-Achse senkrecht zu ihr eine Einzellast vom Betrage 1 wirken, so wird dadurch die Saite in die Form eines gebrochenen Linienzuges deformiert (vgl. Fig. 1). Die größte Abweichung aus der Ruhelage findet sich natürlich genau unter dem Belastungspunkte, d. h. an der Stelle t. Bezeichnen wir sie mit $V(t)$, so wird, wenn wir daran denken, daß die Saite an den Enden $s = 0$ und $s = l$ festgehalten ist, ihre Deformation in diesem Spezialfalle beschrieben durch

$$(1) \qquad V(s) = \begin{cases} V(t)\,\dfrac{s}{t} & \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq t, \\[2ex] V(t)\,\dfrac{l-s}{l-t} & \text{für} \quad t \leqq s \leqq l. \end{cases}$$

Den Wert $V(t)$ können wir aus der Gleichgewichtsbedingung sofort angeben. Die Spannung S wirkt in Richtung der Saite, wie Fig. 1 angibt; diese Kraft hält der äußeren, vertikal gerichteten vom Be-

1) Vgl. hierzu die Darstellung in Riemann-Webers *Partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, herausgegeben von Ph. Frank und R. v. Mises. 7. Aufl. Bd. II (1927) S. 690—700.

trage 1 das Gleichgewicht. Wir erhalten also, da die Vertikalkomponente von S nach oben gerichtet ist, die Gleichgewichtsbedingung

(2) $$S \sin\alpha + S \sin\beta = 1 .$$

Da zufolge unserer oben gemachten Annahme die Verschiebungen der Saitenteilchen aus der Ruhelage heraus nur sehr klein sind gegenüber der ganzen Saitenlänge, so ist

$$\sin\alpha = \frac{V(t)}{c_1} \sim \frac{V(t)}{t} \quad \text{und} \quad \sin\beta = \frac{V(t)}{c_2} \sim \frac{V(t)}{l-t},$$

und (2) wird

(2′) $$S\,V(t)\,\frac{l}{t(l-t)} = 1 .$$

Somit drückt sich, wenn wir für $V(t)$ den Wert aus (2′) in (1) einsetzen, die Deformation unter dem Einflusse einer Einzellast vom Betrage 1 aus durch

(3) $$V(s,t) = \begin{cases} \dfrac{s(l-t)}{Sl} & \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq t, \\ \dfrac{t(l-s)}{Sl} & \text{für} \quad t \leqq s \leqq l. \end{cases}$$

Dabei haben wir $V(s, t)$ statt nur $V(s)$ geschrieben, um anzudeuten, daß die Einzellast an der Stelle t wirkt. Bringen wir bei t statt der Last 1 eine solche vom Betrage P an, so ergibt sich die betreffende Deformation einfach dadurch, daß wir in (3) mit P multiplizieren.

Bringen wir an mehreren Stellen $t_1, t_2, \ldots t_n$ Lasten vom Betrage $P_1, P_2, \ldots P_n$ an, so superponieren sich die Wirkungen, und wir erhalten als Durchbiegung unter dem Einflusse aller dieser Kräfte

(4) $$V^*(s) = \sum_{\nu=1}^{n} V(s, t_\nu)\, P_\nu ,$$

wo die Werte für $V(s, t_\nu)$ aus (3) zu entnehmen sind. Ist die Last stetig über die ganze Saite verteilt, derart, daß auf ein kleines Stück dt die Last $q(t)\,dt$ entfällt, so wird aus der Summe ein Integral, und es ergibt sich als Durchbiegung

5) $$v(s) = \int_0^l V(s,t)\, q(t)\, dt ,$$

worin bei der Integration für die ersten t-Werte, nämlich für $t \leqq s$, $V(s, t)$ durch den zweiten Ausdruck in (3) zu ersetzen ist, für den Rest des Integrationsintervalles durch den ersten.

In (5) haben wir eine Integralgleichung erster Art vor uns, wenn die Aufgabe gestellt wird, eine Saite so zu belasten, daß sie

dadurch eine vorgegebene Gestalt annimmt; dann ist also $v(s)$ gegeben, $q(t)$ wird gesucht; $V(s, t)$ ist als eine der gespannten Saite eigentümliche Funktion, nämlich (3), von vornherein gegeben. Praktisch allerdings bietet diese Fragestellung wenig Interesse, da stets, abgesehen höchstens von ganz speziellen Fällen, umgekehrt $q(t)$, d. h. die Belastung gegeben ist und nach der Durchbiegung $v(s)$ gefragt wird. Wir wollen ja hier auch nicht das statische Problem, sondern das dynamische der Saitenschwingung behandeln.

Bevor wir dazu übergehen, wollen wir aber sogleich noch eine interessante Eigenschaft der *Einflußfunktion* $V(s, t)$ feststellen; sie ist in s und t symmetrisch. Um das nachzuweisen, greifen wir aus dem Intervall $0 \ldots l$ zwei beliebige Werte h und k heraus, und zwar sei $h < k$. Nun setzen wir erstens $s = h, t = k$; dann haben wir nach (3)

$$V(h, k) = \frac{h(l-k)}{Sl}.$$

Zweitens setzen wir $s = k, t = h$; dann ist $s > t$, d. h. es kommt der zweite Teil von (3) zur Anwendung, und wir haben

$$V(k, h) = \frac{h(l-k)}{Sl} = V(h, k).$$

Es ist also in der Tat

$$V(s, t) = V(t, s). \tag{6}$$

Das bedeutet mechanisch: Eine an der Stelle t wirkende Last P ruft bei s die gleiche Durchbiegung hervor, wie sie durch dieselbe bei s wirkende Last P an der Stelle t erzeugt wird.

§ 2. Die schwingende Saite. — Eigenschwingungen.

Bei den Schwingungen, wie wir sie oben beschrieben haben, ist nun die Abweichung von der Ruhelage außer von dem Orte s auch noch von der Zeit τ abhängig; wir schreiben also genauer dafür $v(s, \tau)$. Wir suchen rein periodische Lösungen und machen demgemäß den Ansatz

$$v(s, \tau) = \chi(s) \cos \nu\tau. \tag{1}$$

Nach dem d'Alembertschen Prinzipe ist die Saite in jedem Zeitmomente im Gleichgewicht, wenn wir die Trägheitswiderstände wie äußere Kräfte wirken lassen; diese müssen wir also jetzt bestimmen. Es sei μ die von Ort zu Ort eventuell veränderliche Massendichte der

Saite an der Stelle t; dann ist $\mu(t)\,dt$ die Masse eines Saitenteilchens dt. Dieses erfährt die Beschleunigung

$$\frac{\partial^2 v(t,\tau)}{\partial \tau^2} = -\nu^2 \chi(t) \cos \nu\tau.$$

Mithin ist der Trägheitswiderstand eines Elementes dt der Saite

$$(2)\qquad -\mu(t)\,dt\,\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = \mu(t)\,\nu^2 \chi(t) \cos \nu\tau\,dt.$$

Dieser Wert ist also nach dem d'Alembertschen Prinzipe in (5), § 1 für $q(t)dt$ einzusetzen. So erhalten wir mit Rücksicht auf (1), und wenn wir den gemeinsamen Faktor $\cos \nu\tau$ gleich fortlassen,

$$(3)\qquad \chi(s) = \nu^2 \int_0^l V(s,t)\,\mu(t)\cdot\chi(t)\,dt.$$

Das ist eine homogene Integralgleichung zweiter Art mit dem Kerne $V(s,t)\,\mu(t)$. Dieser ist allerdings in dem allgemeinen Falle, daß die Massendichte μ der Saite veränderlich ist, nicht symmetrisch. Wir können es aber durch eine kleine Modifikation leicht erreichen, daß ein symmetrischer Kern entsteht; das hat, wie wir später sehen werden, immer seine besonderen Vorteile. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir (3) mit $\sqrt{\mu(s)}$ und setzen

$$(4)\qquad \begin{cases} \sqrt{\mu(s)}\,\chi(s) = \psi(s), \\ V(s,t)\sqrt{\mu(s)}\sqrt{\mu(t)} = K(s,t). \end{cases}$$

Aus (3) wird dann

$$(5)\qquad \psi(s) = \lambda \int_0^l K(s,t)\,\psi(t)\,dt, \qquad (\lambda = \nu^2)$$

d. h. eine homogene Integralgleichung zweiter Art mit symmetrischem Kerne, da ja $V(s,t)$ oben schon als symmetrisch erkannt war. In (5) ist die Funktion $\psi(s)$ unbekannt, aber auch der Parameter $\lambda = \nu^2$. Sowohl $\psi(s)$ als auch $\lambda = \nu^2$ haben in dem vorliegenden Falle eine einfache physikalische Bedeutung; es ist nämlich

$$\frac{\psi(s)}{\sqrt{\mu(s)}} = \chi(s)$$

die Amplitude der betrachteten Schwingung; und zwar sehen wir aus (1), daß hier alle Teilchen der Saite zur selben Zeit ihren größten Ausschlag haben. In dem ganzen Intervalle $0 \leqq s \leqq l$ gibt uns also $\chi(s)$ die Amplitudenfigur, die zu dieser speziellen Schwingung ge-

hört. Die physikalische Bedeutung von λ entnehmen wir daraus, daß $\frac{\nu}{2\pi}$ die Schwingungszahl der periodischen Schwingung (1) ist. Die später zu entwickelnde Theorie der Integralgleichungen wird uns den Satz bringen, daß die Gleichung (5) nicht für alle möglichen λ, sondern nur für gewisse Einzelwerte

(6) $$\lambda_1 = \nu_1^2; \quad \lambda_2 = \nu_2^2; \quad \lambda_3 = \nu_3^2; \ldots$$

lösbar ist. Die physikalische Deutung dieses Satzes besagt nach den obigen Ausführungen, daß eine sich selbst überlassene Saite periodische Schwingungen nicht mit allen möglichen Schwingungszahlen ausführen kann, sondern nur ganz bestimmte, ihr eigentümliche. Genauer erhalten wir, entsprechend (6), eine Folge von Schwingungszahlen

$$\frac{\nu_1}{2\pi}, \frac{\nu_2}{2\pi}, \frac{\nu_3}{2\pi}, \ldots,$$

in denen die Saite schwingen kann, und diesen entsprechend eine Folge von Amplitudenfiguren

(7) $$\chi_1(s), \quad \chi_2(s), \quad \chi_3(s), \ldots$$

Das alles steht in bester Übereinstimmung mit dem bekannten Resultate der Experimentalphysik, daß eine Saite nur ganz bestimmte periodische Schwingungen ausführen kann, wenn sie sich selbst überlassen bleibt. Die Schwingungszahlen, die dabei auftreten können, und die Gestalt der dazugehörigen Amplitudenfiguren sind durch die Länge, die Massenverteilung und die elastischen Eigenschaften der Saite festgelegt. Man nennt deshalb diese der betreffenden Saite eigentümlichen Schwingungen ihre *Eigenschwingungen* und die zugehörigen Schwingungszahlen ihre *Eigenfrequenzen*. Die kleinstmögliche Schwingungszahl liefert den Grundton, die anderen die Obertöne.

Wir sehen weiter aus (5), daß das zu einem bestimmten ν^2 gehörige $\psi(s)$ nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist. Das besagt, daß die geometrische Gestalt der Amplitudenfigur nur festliegt bis auf eine, alle Teilchen in gleicher Weise betreffende Vergrößerung oder Verkleinerung im Vergleiche zu einem, an sich willkürlich herausgegriffenen *Normalfalle*. Wählen wir als solchen denjenigen, für den

(8) $$\int_0^l \psi^2(s)\,ds = \int_0^l \mu(s)\,\chi^2(s)\,ds = 1$$

ist, so ist die Gesamtheit der zu einer bestimmten Frequenz gehörigen Amplitudenfiguren gegeben durch

$$A(s) = C\chi(s).$$

Die Größe des Faktors C ist ein Maß für die Intensität des betreffenden Tones.

In Übertragung dieser physikalischen Zusammenhänge nennt man nach Hilbert ganz allgemein die Parameterwerte $\lambda_\varkappa$, welche eine nichttriviale Lösung der homogenen Integralgleichung zweiter Art

$$\varphi_\varkappa(s) = \lambda_\varkappa \int_a^b K(s, t)\, \varphi_\varkappa(t)\, dt$$

gestatten, die *Eigenwerte* des Kernes $K(s, t)$ und die zugehörigen Lösungen die *Eigenfunktionen*. Diese werden wir, ebenso wie in (8), später stets so *normieren*, daß

$$\int_a^b \varphi_\varkappa^2(s)\, ds = 1$$

ist, womit die unbestimmte Konstante festgelegt wird.

Die obigen Ausführungen haben uns folgendes gezeigt: Ein später erst noch zu beweisender mathematischer Satz, nämlich der, daß die homogene Integralgleichung zweiter Art nur für diskrete Parameterwerte λ_n eine nichttriviale Lösung besitzt, führt, angewendet auf das Problem der freien Saitenschwingung, zu Schlußfolgerungen physikalischer Natur, die durchaus in Einklang stehen mit dem, was die Experimentalphysik lehrt. Da ist es nicht ohne Interesse, auch umgekehrt eine Feststellung mathematischer Art, zu der man auf Grund der experimentellen Beobachtung gelangt ist, in unserem Beispiele nachzuprüfen. Wir wissen, daß eine homogene Saite (d. h. $\mu(t) = \text{const.}$) im Grundtone eine einfache Sinusschwingung ausführt; das bedeutet mathematisch, daß in diesem Falle die Amplitudenfigur durch

$$\chi(s) = c \sin \alpha s$$

gegeben ist. Der Faktor c interessiert uns hier nicht; er ist durch die Intensität des Tones bedingt. Aber α bestimmt sich aus der Bedingung, daß

$$\chi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \chi(l) = 0$$

ist, während für $0 < s < l$

$$\chi(s) \neq 0$$

bleibt; das entspricht der physikalischen Sachlage, daß beim Grund-

tone kein Knotenpunkt vorhanden ist. Dann aber ergibt sich zwingend

$$\alpha = \frac{\pi}{l},$$

und wir haben $$\chi(s) = c \sin \frac{\pi}{l} s.$$

c bedeutet also die größtmögliche Ausbuchtung der Saite in der Mitte. Wenn unsere obigen Überlegungen richtig sind, so ist also nach (4)

$$\chi(s) = \frac{\varphi(s)}{\sqrt{\mu(s)}} = c \sin \frac{\pi}{l} s,$$

und da hier μ eine Konstante ist, so müßte nach (8) die Beziehung gelten

$$\sin \frac{\pi}{l} s = \nu_1^2 \mu \int_0^l V(s, t) \sin \frac{\pi}{l} t\, dt. \tag{9}$$

Daß dies in der Tat bei passendem ν_1^2 erfüllt ist, wollen wir noch kurz zeigen. Die rechte Seite von (9) lautet, mit Rücksicht auf (3), § 1,

$$J(s) = \nu_1^2 \mu \int_0^s \frac{t(l-s)}{Sl} \sin \frac{\pi}{l} t\, dt + \nu_1^2 \mu \int_s^l \frac{s(l-t)}{Sl} \sin \frac{\pi}{l} t\, dt.$$

Man kann, was dem Leser zur Ausführung überlassen bleibe, die Integrale rechts direkt ausrechnen und so — bei passendem ν_1^2 —

$$J(s) = \sin \frac{\pi}{l} s$$

bestätigen. Eleganter ergibt sich dies aber, indem wir $J(s)$ zweimal differenzieren; es ist

$$J'(s) = \frac{-\nu_1^2 \mu}{Sl} \int_0^s t \sin \frac{\pi}{l} t\, dt + \frac{\nu_1^2 \mu}{Sl} \int_s^l (l-t) \sin \frac{\pi}{l} t\, dt.$$

Dabei heben sich die beiden Glieder, die bei der Differentiation von der oberen Grenze des ersten Integrales bzw. der unteren Grenze des zweiten herrühren, gerade auf. Etwas anders geschrieben ist

$$J'(s) = -\frac{\nu_1^2 \mu}{Sl} \int_0^l t \sin \frac{\pi}{l} t\, dt + \frac{\nu_1^2 \mu}{S} \int_s^l \sin \frac{\pi}{l} t\, dt$$

und also $$J''(s) = -\frac{\nu_1^2 \mu}{S} \sin \frac{\pi}{l} s.$$

Aus dieser letzten Beziehung aber folgt durch Integration

$$J'(s) = \frac{\nu_1^2 \mu}{S} \cos \frac{\pi}{l} s \cdot \frac{l}{\pi} + C_1$$

und
$$J(s) = \frac{\nu_1^2 \mu \cdot l^2}{S \pi^2} \sin \frac{\pi}{l} s + C_1 s + C_2.$$

Wegen $J(0) = 0$ ist $C_2 = 0$, und $J(l) = 0$ ergibt dann noch $C_1 = 0$, so daß wir schließlich

(10)
$$J(s) = \frac{\nu_1^2 \mu}{S} \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{l} s$$

erhalten. Wir sehen also, daß für

$$\nu_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

tatsächlich (9) erfüllt ist.

Diese Betrachtung läßt uns aber sogleich noch weitere Schlüsse ziehen. Auch die harmonischen Obertöne sind Sinusschwingungen; nur haben sie einen, zwei oder noch mehr Knotenpunkte. Zwischen zwei Knotenpunkten bzw. zwischen einem Knotenpunkte und einem Endpunkte der Saite schwingt die homogene Saite, wie beim Grundtone besprochen. Das sind die Tatsachen, die uns die Experimentalphysik gibt; mathematisch bedeutet dies, daß bei einem beliebigen harmonischen Obertone die Amplitudenfigur gegeben ist durch

$$\chi(s) = c \sin \alpha s,$$

wobei wieder
$$\chi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \chi(l) = 0$$

zu beachten ist. Letzteres beschränkt α auf die Werte

$$\alpha = n \frac{\pi}{l}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

d. h. wir erhalten
$$\chi_n(s) = c \sin n \frac{\pi}{l} s.$$

$n = 1$ liefert den vorhin behandelten Grundton; bei einem beliebigen n haben wir den $(n-1)$ten Oberton mit $n-1$ Knotenpunkten. Wieder folgern wir: Wenn unsere obigen Überlegungen richtig sind, so muß $\chi_n(s)$ der Gleichung (8) genügen; d. h. es müßte, da wegen der vorausgesetzten Homogenität der Saite μ eine Konstante ist, bei passendem ν_n

(9')
$$\sin n \frac{\pi}{l} s = \nu_n^2 \mu \int_0^l V(s, t) \sin n \frac{\pi}{l} t \, dt = J_n(s)$$

identisch in s erfüllt sein. Das ist in der Tat richtig, wie wir durch genau dieselben Überlegungen wie beim Grundtone einsehen. An Stelle von (10) erhalten wir jetzt

$$(10') \qquad J_n(s) = \frac{\nu_n^2 \mu}{S} \cdot \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \sin n \frac{\pi}{l} s$$

und daraus

$$\nu_n = n \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{S}{\mu}}.$$

Es sind also, abgesehen von dem Faktor $\frac{1}{2\pi}$,

$$(11) \qquad \nu_1 = 1 \cdot \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{S}{\mu}}, \quad \nu_2 = 2 \cdot \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{S}{\mu}}, \quad \nu_3 = 3 \cdot \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{S}{\mu}}, \ldots$$

die Schwingungszahlen, mit denen eine homogene Saite (ohne Einwirkung äußerer Kräfte) periodische Schwingungen ausführen kann; die zugehörigen Amplitudenfiguren sind

$$(12) \quad \chi_1(s) = c_1 \sin \frac{\pi}{l} s, \quad \chi_2(s) = c_2 \sin 2 \frac{\pi}{l} s, \quad \chi_3(s) = c_3 \sin 3 \frac{\pi}{l} s, \ldots$$

Dieses Ergebnis besagt in der Sprache der Integralgleichungen, daß die homogene Integralgleichung zweiter Art

$$\varphi_\varkappa(s) = \lambda_\varkappa \int_0^l V(s, t) \varphi_\varkappa(t) \, dt$$

in nichttrivialer Weise lösbar ist für

$$(13) \qquad \lambda_\varkappa = \varkappa^2 \frac{\pi^2}{l^2} S,$$

und zwar durch die Lösungsfunktionen

$$(14) \qquad \varphi_\varkappa(s) = c_\varkappa \sin \varkappa \frac{\pi}{l} s.$$

Oder anders ausgedrückt: Unser spezieller symmetrischer Kern $V(s, t)$ hat, wenn wir die Bezeichnungen S. 10 anwenden, die *Eigenwerte* (13) und die *Eigenfunktionen* (14). Diese sind *normiert*, wenn wir für alle $\varkappa$

$$(14') \qquad c_\varkappa = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

setzen; denn dann ist

$$\int_0^l \varphi_\varkappa^2(s) \, ds = \frac{2}{l} \int_0^l \sin^2 \varkappa \frac{\pi}{l} s \, ds = \frac{2}{l} \cdot \frac{l}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \varkappa x \, dx = 1.$$

Aus der Integralrechnung wissen wir ferner, daß für $\mu \neq \nu$ stets

$$\int_0^l \varphi_\mu(s)\varphi_\nu(s)\,ds = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\mu x \sin\nu x\,dx = 0 \tag{15}$$

ist. Es haben also die Eigenfunktionen unseres Kernes $V(s, t)$ die Eigenschaft, daß für $\mu \neq \nu$

$$\int_0^l \varphi_\mu(s)\varphi_\nu(s)\,ds = 0 \tag{16}$$

ist. Man sagt dafür, $\varphi_\mu(s)$ und $\varphi_\nu(s)$ seien *orthogonal für das Intervall* $0 \ldots l$. Wir werden später bei der Behandlung der allgemeinen Theorie sehen, daß (16) nicht eine zufällige Eigenschaft des speziellen Kernes

$$V(s,t) = \begin{cases} \dfrac{s(l-t)}{Sl} & \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq t, \\[2ex] \dfrac{t(l-s)}{Sl} & \text{für} \quad t \leqq s \leqq l \end{cases}$$

ist, sondern, daß ganz allgemein die zu verschiedenen Eigenwerten eines symmetrischen Kernes gehörigen Eigenfunktionen orthogonal für das zugrunde liegende Intervall sind.

§ 3. Die schwingende Saite. — Der Energiesatz.

Für die schwingende Saite hat die Orthogonalität noch eine besondere physikalische Bedeutung. Um dies zu erkennen, müssen wir einen Ausdruck für die potentielle und kinetische Energie der Saite ableiten. Wir betrachten zunächst wieder den statischen Fall. Die Lasten, welche die Durchbiegung der Saite bewirken, leisten dabei Arbeit; diese wird als *potentielle Energie der Deformation* in der Saite aufgespeichert und geht bei Fortnehmen der Lasten in die *kinetische Energie der Schwingungen* über. Der Betrag der Arbeit ist allgemein gegeben durch das Produkt aus Kraft und Weg. Der Einzelteil $q(t)\,dt$ der ganzen Belastung ruft (vgl. S. 6) an der Stelle s die Deformation $V(s, t)\,q(t)\,dt$ hervor, während dort die Kraft $q(s)\,ds$ wirkt. Es wird aber die Deformation aus der Ruhelage heraus erwirkt, indem die Kraft $x \cdot q(s)\,ds$ in linearem Anstiege von 0 bis $1 \cdot q(s)\,ds$ wächst. Wir erhalten also für einen Arbeitsanteil bei der Deformation den Wert

$$x\,q(s)\,ds \cdot V(s,t)\,q(t)\,dt\,dx.$$

Wenn wir über alle diese Einzelanteile summieren, d. h. nach s und t

von 0 bis l und nach x von 0 bis 1 integrieren, so erhalten wir die potentielle Energie U zu

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l V(s,t)\,q(s)\,q(t)\,ds\,dt.^{1)} \tag{1}$$

Dabei haben wir die bei der potentiellen Energie stets vorhandene unbestimmte additive Konstante dahin festgelegt, daß wir die potentielle Energie im unbelasteten Zustande der Saite gleich Null gesetzt haben.

Haben wir wieder die spezielle Schwingung

$$v(s,\tau) = \chi(s)\cos\nu\tau, \tag{2}$$

so ist die potentielle Energie der Saite mit der Zeit τ veränderlich. Wir erhalten den Wert $U(\tau)$ zu einem beliebig herausgegriffenen Zeitpunkte τ, wenn wir in (1) als Belastung den Trägheitswiderstand

$$-\mu(t)\,dt\,\frac{\partial^2 v(t,\tau)}{\partial\tau^2} = \mu(t)\,\nu^2\chi(t)\cos\nu\tau\,dt$$

wirken lassen; es ist also bei dieser Schwingung

$$U(\tau) = \frac{1}{2}\nu^4\cos^2\nu\tau\int_0^l\int_0^l V(s,t)\,\mu(s)\,\mu(t)\,\chi(s)\,\chi(t)\,ds\,dt \tag{3}$$

die potentielle Energie der Saite zur Zeit τ; oder wir haben, wenn wir uns zunächst wieder auf den Fall einer homogenen Saite beschränken,

$$U(\tau) = \frac{1}{2}\mu^2\nu^4\cos^2\nu\tau\int_0^l\int_0^l V(s,t)\,\chi(s)\,\chi(t)\,ds\,dt. \tag{3'}$$

Hierin hat ν einen der Werte (11), § 2, und $\chi(s)$ bedeutet die entsprechende Funktion aus (12), § 2. Führen wir das Integral nach t aus, so erhalten wir wegen (9'), § 2 als potentielle Energie bei einer bestimmten Eigenschwingung

$$U_n(\tau) = \frac{1}{2}\mu\nu_n^2\cos^2\nu_n\tau\int_0^l \chi_n^2(s)\,ds. \tag{4}$$

---

1) Eine besonders elegante Ableitung dieses Ausdruckes erhält man durch Variation der Belastung und der dadurch hervorgerufenen Variation der geleisteten Arbeit (vgl. Riemann-Weber a. a. O. S. 694).

Die kinetische Energie dieser selben Schwingung ist

$$(5)\quad T_n(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^l \mu(s)\left(\frac{\partial v(s,\tau)}{\partial \tau}\right)^2 ds = \frac{1}{2}\,\mu\nu_n^2\sin^2\nu_n\tau\int_0^l \chi_n^2(s)\,ds.$$

Mithin ist die Gesamtenergie E_n gegeben durch

$$(6)\qquad E_n = T_n + U_n = \frac{\nu_n^2}{2}\,\mu\int_0^l \chi_n^2(s)\,ds.$$

Sie ist, wie es nach dem Energiesatze auch sein muß, von der Zeit τ unabhängig.

Wir wollen nun zwei Eigenschwingungen mit den Frequenzen ν_h und ν_k superponieren; dann wissen wir, daß sich die Ausschläge

$$v_h(s,\tau) = \chi_h(s)\cos\nu_h\tau \quad \text{und} \quad v_k(s,\tau) = \chi_k(s)\cos\nu_k\tau$$

einfach addieren, daß also dann

$$\mathfrak{v}(s,\tau) = v_h(s,\tau) + v_k(s,\tau) = \chi_h(s)\cos\nu_h\tau + \chi_k(s)\cos\nu_k\tau$$

ist. Die Orthogonalität der Funktionen $\chi_h(s)$ und $\chi_k(s)$ wird uns nun zeigen, daß auch die Energien sich addieren. Es sind

$$T_h(\tau) = \frac{1}{2}\,\nu_h^2\mu\sin^2\nu_h\tau\int_0^l \chi_h^2(s)\,ds$$

bzw.

$$T_k(\tau) = \frac{1}{2}\,\nu_k^2\mu\sin^2\nu_k\tau\int_0^l \chi_k^2(s)\,ds$$

die kinetischen Energien der einzelnen dieser beiden harmonischen Schwingungen. Die Schwingung $\mathfrak{v}(s,\tau)$ dagegen hat die kinetische Energie

$$T(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^l \mu\left(\frac{\partial\mathfrak{v}(s,\tau)}{\partial\tau}\right)^2 ds = \frac{1}{2}\,\mu\int_0^l \{\chi_h^2(s)\,\nu_h^2\sin^2\nu_h\tau$$

$$+\chi_k^2(s)\,\nu_k^2\sin^2\nu_k\tau + 2\chi_h(s)\chi_k(s)\,\nu_h\nu_k\sin\nu_h\tau\sin\nu_k\tau\}\,ds$$

oder, wegen (5),

$$T(\tau) = T_h(\tau) + T_k(\tau) + \mu\nu_h\nu_k\sin\nu_h\tau\sin\nu_k\tau\int_0^l \chi_h(s)\chi_k(s)\,ds.$$

Nun sind aber nach (12), § 2, und (15), § 2, $\chi_h(s)$ und $\chi_k(s)$ orthogonal, d. h. das rechts stehende Integral ist Null, und wir haben

$$T(\tau) = T_h(\tau) + T_k(\tau). \tag{7}$$

Da der Trägheitswiderstand eines Saitenelementes bei der superponierten Schwingung gegeben ist durch

$$-\mu dt \frac{\partial^2 \mathfrak{v}(t,\tau)}{\partial \tau^2} = \mu dt [\nu_h^2 \chi_h(t) \cos \nu_h \tau + \nu_k^2 \chi_k(t) \cos \nu_k \tau],$$

so folgt mit Rücksicht auf (4) für die potentielle Energie durch dieselbe Überlegung wie eben

$$U(\tau) = U_h(\tau) + U_k(\tau), \tag{8}$$ also auch

$$E = E_h + E_k, \tag{9}$$

wieder in Übereinstimmung mit dem Energiesatze. Dasselbe Resultat finden wir, eben zufolge der Orthogonalität der Funktionen (12), § 2, wenn wir mehrere solcher harmonischen Eigenschwingungen superponieren. Auch wenn wir die spezielle Annahme $\mu(s) =$ const. fallen lassen, gilt, wenn wir den schon S. 14 erwähnten allgemeinen Satz über die Orthogonalität der Eigenfunktionen heranziehen, genau dieselbe Überlegung mit den gleichen Folgerungen. In diesem Zusammenhange können wir also sagen: Die Gültigkeit des Energiesatzes findet ihren mathematischen Ausdruck in der Orthogonalität der hier auftretenden Eigenfunktionen.

§ 4. Die schwingende Saite. — Berücksichtigung des Anfangszustandes; Reihenentwicklung.

Wir wollen nun an das allgemeine Problem der freien Schwingung einer Saite herangehen, d. h. an die Ermittlung der Funktion $\mathfrak{v}(s,\tau)$, die uns zu jeder beliebigen Zeit τ den Ausschlag an der Stelle s angibt. Dazu überlegen wir zunächst, daß physikalisch die Bewegung der Saite eindeutig bestimmt ist, wenn zu Beginn der Untersuchung, sagen wir für $\tau = 0$, die Deformation der Saite und ihr Bewegungszustand, d. h. die Geschwindigkeit eines jeden einzelnen Teilchens, gegeben sind. Mathematisch bedeutet dies, daß $\mathfrak{v}(s,\tau)$ die Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} \mathfrak{v}(s,0) = f(s), \\ \left(\frac{\partial \mathfrak{v}(s,\tau)}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = g(s) \end{cases} \tag{1}$$

befriedigen muß, wo $f(s)$ und $g(s)$ gegebene Funktionen sind. Der Grundgedanke, dieser Forderung gerecht zu werden, besteht darin,

in geeigneter Weise die Eigenschwingungen, wie sie in § 2 betrachtet wurden, so zu superponieren, daß der Forderung (1) Genüge geschieht. Wir beachten dabei, daß neben

(2) $$v_n(s, \tau) = A_n \chi_n(s) \cos \nu_n \tau$$ auch

(2′) $$v_n^*(s, \tau) = B_n \chi_n(s) \sin \nu_n \tau$$

eine harmonische Schwingung der Saite bedeutet. Dabei haben wir die Faktoren A_n und B_n hinzugefügt, weil wir von jetzt an die $\chi_n(s)$ dahin spezialisieren wollen, daß das entsprechende $\psi_n(s) = \sqrt{\mu(s)}\,\chi_n(s)$ normiert ist, daß also

$$\int_0 \psi_n^2(s)\,ds = \int_0^l \mu(s)\chi_n^2(s)\,ds = 1$$

ist. Eine beliebige Superposition von Eigenschwingungen (2) und (2′) gibt uns die Schwingung

(3) $$\mathfrak{v}(s, \tau) = \sum_{h=1}^{\infty} \chi_h(s)\left[A_h \cos \nu_h \tau + B_h \sin \nu_h \tau\right].$$

Hierin kann die Summe auf der rechten Seite speziell auch eine endliche Summe sein; nur werden wir i. a., wenn wir die Bedingungen (1) erfüllen wollen, mit einer solchen nicht auskommen. Im Falle einer unendlichen Summe aber erhält (3) erst einen Sinn, wenn wir die Konvergenzfrage befriedigend gelöst haben. Lassen wir diese zunächst noch beiseite, so sehen wir nach (2) und (3), § 2 sogleich, daß (3) die Integralgleichung der freien Saitenschwingung

$$\mathfrak{v}(s, \tau) = -\int_0^l V(s, t)\,\mu(t)\,\frac{\partial^2 \mathfrak{v}(t, \tau)}{\partial \tau^2}\,dt$$

befriedigt; denn jedes einzelne Summenglied in (3) tut dies.

Es handelt sich also nun darum, in (3) die Konstanten A_n und B_n so zu bestimmen, daß gemäß den Anfangsbedingungen (1)

(1′) $$\begin{cases} \mathfrak{v}(s, 0) = \sum\limits_{h=1}^{\infty} A_h \chi_h(s) \quad = f(s), \\ \left(\dfrac{\partial \mathfrak{v}(s, \tau)}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = \sum\limits_{h=1}^{\infty} B_h \nu_h \chi_h(s) = g(s) \end{cases}$$

wird. Wir werden hier also auf das Problem geführt, gegebene Funktionen in eine Reihe nach den Eigenfunktionen eines symmetri-

schen Kernes zu entwickeln; denn multiplizieren wir in (1′) noch mit $\sqrt{\mu(s)}$, so erhalten wir

$$(1'')\quad \begin{cases} \sum_{h=1}^{\infty} A_h \sqrt{\mu(s)}\,\chi_h(s) = \sum_{h=1}^{\infty} A_h \psi_h(s) = f(s)\sqrt{\mu(s)} = \bar{f}(s), \\ \sum_{h=1}^{\infty} B_h \nu_h \sqrt{\mu(s)}\,\chi_h(s) = \sum_{h=1}^{\infty} B_h \nu_h \psi_h(s) = g(s)\sqrt{\mu(s)} = \bar{g}(s). \end{cases}$$

Dabei sind die $\psi_h(s)$ Eigenfunktionen des in (4), § 2 definierten Kernes $K(s,t)$. Wir bemerken schon hier, daß die Fourierschen Reihen ein Spezialfall ($\mu(s) = \text{const.}$) der oben genannten Reihenentwicklung sind. Für die Koeffizienten A_n und B_n erhalten wir leicht in folgender Weise einen Integralausdruck: Multiplizieren wir die erste Gleichung (1″) mit $\psi_n(s)$ und integrieren über s von 0 bis l, so ergibt sich, gleichmäßige Konvergenz vorausgesetzt,

$$\int_0^l \bar{f}(s)\psi_n(s)\,ds = \sum_{h=1}^{\infty} A_h \int_0^l \psi_h(s)\psi_n(s)\,ds.$$

Nun sind aber, wie in der allgemeinen Theorie gezeigt werden wird, für $n \neq h$ die Funktionen $\psi_h(s)$ und $\psi_n(s)$ orthogonal, d. h. das Integral ihres Produktes ist Null, und für den einen Wert $n = h$ wird das Integral wegen der Normiertheit gerade 1. Die ganze rechte Seite reduziert sich somit auf A_n, und wir haben

$$(4)\quad \begin{cases} A_n = \int_0^l \bar{f}(s)\psi_n(s)\,ds = \int_0^l \mu(s) f(s)\cdot\chi_n(s)\,ds, \\ B_n = \frac{1}{\nu_n}\int_0^l \bar{g}(s)\psi_n(s)\,ds = \frac{1}{\nu_n}\int_0^l \mu(s) g(s)\cdot\chi_n(s)\,ds. \end{cases}$$

Dabei sind die Werte B_n genau ebenso gefunden wie die A_n.

Eines der wichtigsten Probleme unserer späteren Untersuchungen wird in dem Nachweis bestehen, daß die eben durchgeführte Überlegung nicht nur einen formalen Charakter hat, mit anderen Worten, daß die so gewonnenen Reihen auch wirklich konvergieren, und zwar gleichmäßig in s; denn nur dann sind die vorgenommenen Operationen legitim. Nun sind, wenn $f(s)$ und $g(s)$ beliebige Funktionen bedeuten, die Reihenentwicklungen (1′) ganz sicher nicht immer möglich; denn schon bei den Fourierschen Reihen genügt, wie zuerst

Du Bois-Reymond gezeigt hat[1]), nicht einmal immer die Stetigkeit allein für die Entwickelbarkeit in eine solche Reihe. Wir werden später eine allgemeine hinreichende Bedingung dafür kennenlernen, daß diese Entwicklung, und zwar als gleichmäßig konvergente Reihe, gilt. In unserem Falle handelt es sich um ein physikalisches Problem. Wir werden uns also als Ausgangsfigur der deformierten Saite nicht eine beliebige mathematische Funktion $f(s)$ gegeben denken dürfen, sondern nur solche Deformationen, die physikalisch realisierbar sind. Speziell bleiben hier die Energiebeträge endlich, und dann treten keine Schwierigkeiten auf.

§ 5. Erzwungene Schwingungen einer Saite.

Bei den bisherigen Betrachtungen handelte es sich um freie Schwingungen der Saite; nachdem irgendwie der Anfangszustand (Lage und Geschwindigkeit) hergestellt war, hatten wir die Saite sich selbst überlassen; es wirkten keine äußeren Kräfte mehr. Nun wollen wir zum Abschluß noch kurz den Fall untersuchen, wo die Saite durch eine periodische Erregung von außen her in Schwingungen versetzt wird. Wir beschränken uns dabei auf die Behandlung der Einwirkung einer speziellen äußeren Kraft von der Form

$$(1)\qquad Q(s,\tau) = q(s)\cos\varrho\tau\,.$$

Die Ausbuchtungen der Saite werden dann in demselben Rhythmus wechseln wie die Kraftwirkung, so daß wir die Lösung in der Form

$$(2)\qquad v(s,\tau) = \vartheta(s)\cos\varrho\tau$$

ansetzen können. Nach dem d'Alembertschen Prinzipe haben wir wieder in jedem Zeitmomente Gleichgewicht, wenn wir die Trägheitswiderstände wie äußere Kräfte wirken lassen. So erhalten wir, analog wie oben,

$$(3)\qquad v(s,\tau) = \vartheta(s)\cos\varrho\tau = \int_0^l V(s,t)\left[Q(t,\tau) - \frac{\partial^2 v(t,\tau)}{\partial\tau^2}\mu(t)\right]dt\,.$$

Dabei hat $V(s,t)$ nach wie vor die Bedeutung (3), § 1. Lassen wir in (3) den gemeinsamen Faktor $\cos\varrho\tau$ fort, so ergibt sich

$$\vartheta(s) = \int_0^l V(s,t)\,q(t)\,dt + \varrho^2\int_0^l V(s,t)\,\mu(t)\,\vartheta(t)\,dt\,.$$

1) Gött. Nachr. 1873, S. 571. Ein einfacheres Beispiel hat L. Fejér in *Journ. f. d. reine u. angew. Math.* Bd. 137 (1909) S. 1 gegeben.

Multiplizieren wir, um wieder auf einen symmetrischen Kern zu kommen, mit $\sqrt{\mu(s)}$ und setzen

$$(4)\qquad \begin{cases} \sqrt{\mu(s)}\,\vartheta(s) = \eta(s), \\ \sqrt{\mu(s)}\int\limits_0^l V(s,t)q(t)\,dt = f(s), \\ \sqrt{\mu(s)}\sqrt{\mu(t)}\,V(s,t) = K(s,t), \end{cases}$$

so ergibt sich als Gleichung für die erzwungene Schwingung

$$(5)\qquad f(s) = \eta(s) - \varrho^2\int\limits_0^l K(s,t)\eta(t)\,dt,$$

d. h. eine *inhomogene Integralgleichung zweiter Art.* $K(s, t)$ ist dabei eine der Saite eigentümliche Funktion, $f(s)$ nach (4) außer von den Eigenschaften der Saite noch von der speziellen Natur der äußeren Kräfte abhängig, aber mit diesen gegeben; gesucht ist $\eta(s)$, mit dessen Ermittlung auch der Schwingungsverlauf der Saite gefunden ist.

In dem vorliegenden Falle hat die freie Funktion $f(s)$ eine sehr einfache physikalische Bedeutung; es ist nämlich, wie die Betrachtung des § 1 lehrt, $\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}}$ die statische Durchbiegung an der Stelle s, wenn die Saite mit der Last $q(t)$, d. h. mit dem Höchstwert der periodischen Kraft, belastet wird. Es seien

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \ldots$$

und

$$\varphi_1(s), \ \varphi_2(s), \ \varphi_3(s), \ldots$$

die Eigenwerte und Eigenfunktionen des hier vorliegenden Kernes

$$K(s,t) = \sqrt{\mu(s)}\sqrt{\mu(t)}\,V(s,t),$$

und zwar seien die $\varphi_n(s)$ normiert, d. h.

$$\int\limits_0^l \varphi_n^2(s)\,ds = 1.$$

Wegen der in § 4 besprochenen Entwicklung nach Eigenfunktionen liegt es nahe, in (5) auch für $\eta(s)$ den Ansatz

$$(6)\qquad \eta(s) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \varphi_\lambda(s)$$

zu machen. Setzen wir dies in (5) ein, so erhalten wir die Relation

$$f(s) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h \varphi_h(s) - \varrho^2 \int_0^l K(s,t) \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h \varphi_h(t)\, dt$$

oder, wenn wir gleichmäßige Konvergenz annehmen,

$$(7) \qquad \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h \varphi_h(s) - f(s) = \varrho^2 \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h \int_0^l K(s,t)\, \varphi_h(t)\, dt$$
$$= \varrho^2 \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h \frac{1}{\lambda_h} \varphi_h(s).$$

Der letzte Schritt hierbei ist geschehen mit Benutzung der Definitionsgleichung der $\varphi_n(s)$, nämlich

$$\varphi_n(s) = \lambda_n \int_0^l K(s,t)\, \varphi_n(t)\, dt.$$

Aus (7) folgt, wenn wir beiderseits mit $\varphi_n(s)$ multiplizieren und nach s integrieren,

$$\int_0^l \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h \varphi_h(s)\, \varphi_n(s)\, ds - \int_0^l f(s)\, \varphi_n(s)\, ds$$
$$= \varrho^2 \int_0^l \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha_h}{\lambda_h} \varphi_h(s)\, \varphi_n(s)\, ds$$

und hieraus nach Vertauschung von Summation und Integration wegen der Orthogonalität und Normiertheit der $\varphi_\varkappa(s)$

$$\alpha_n - \gamma_n = \varrho^2 \frac{\alpha_n}{\lambda_n} \qquad \left(\gamma_n = \int_0^l f(s)\, \varphi_n(s)\, ds\right).$$

Setzen wir den hieraus sich ergebenden Wert für α_n in (6) ein, so erhalten wir

$$(8) \qquad \eta(s) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\gamma_h \lambda_h}{\lambda_h - \varrho^2} \varphi_h(s)$$

als Lösung der inhomogenen Integralgleichung (5).

Daß die hier angedeuteten Schritte tatsächlich zu Recht bestehen und daß ähnliche Betrachtungen ganz allgemein zum Ziele führen,

das bildet den Hauptteil des folgenden Kapitels, wo die allgemeine Theorie in der von E. Schmidt gegebenen Form dargestellt wird. Auf einen Punkt wollen wir aber noch besonders hinweisen: Aus (8) ersehen wir, daß stillschweigende Voraussetzung

$$\varrho^2 \neq \lambda_n$$

sein mußte; mit anderen Worten, der Parameterwert der inhomogenen Integralgleichnng (5) darf nicht mit einem der Eigenwerte übereinstimmen; denn in diesem Falle würde in dem einen Summengliede der Nenner 0 auftreten. Auch über diesen Sonderfall wird die allgemeine Theorie uns restlos Aufschluß geben. Die physikalische Deutung desselben in unserem speziellen Beispiele ist die folgende: Die Eigenwerte bzw. der Parameter ϱ^2 sind im wesentlichen die Quadrate der Frequenzen der Eigenschwingungen der Saite bzw. der Frequenz der periodischen äußeren Kraft. Lassen wir nun die Periode der Außenkraft sich mehr und mehr einer der Eigenfrequenzen nähern, so werden, wie das Experiment lehrt, die Amplituden der schwingenden Saite größer und größer. Besonders deutlich ist das z. B. bei den starken Schwankungen einer Brücke zu beobachten, wenn etwa das taktmäßige Marschtempo darüberziehender Soldaten in der Nähe der Eigenschwingung der Brücke liegt. Die Formel (8) läßt uns folgern, daß in dem genannten Sonderfalle $\eta(s)$, d. h. nach (4) die Amplitude der erzwungenen Schwingung, unendlich groß wird (Fall der Resonanz). Daß demgegenüber beim Experimente nur ein — allerdings sehr deutlich ausgeprägtes — Maximum zu beobachten ist, hat seinen Grund darin, daß wir die Reibung ganz unberücksichtigt gelassen haben und daß die von uns benutzten Formeln nur kleine Deformationen voraussetzen.

§ 6. Ein optisches Problem.

Es handelt sich in diesem Paragraphen um ein Problem der Helligkeitsverteilung.[1]) Nach einem Grundsatze der geometrischen Optik wird der Weg, den ein Lichtstrahl von einem leuchtenden Punkte aus irgendwie, z. B. durch ein Linsensystem, zu einem Bildpunkte etwa auf einem Auffangschirme durchläuft, genau in derselbe Weise rückwärts zurückgelegt, wenn man die Lichtquelle in den Bildpunkt

1) Vgl. hierzu L. Mandelstam, *Festschrift für H. Weber* (Leipzig 1912), S. 228—241, oder auch die Darstellung in Riemann-Webers *Partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, herausgegeben von Ph. Frank und R. v. Mises. 7. Aufl. Bd. I (1925) S. 383 bis 385.

bringt. Wenn wir also durch das Linsensystem eines Fernrohres oder eines Mikroskopes oder einer photographischen Kamera das Bild eines leuchtenden oder beleuchteten Gegenstandes auffangen, so entspricht jedem Punkte des Objektes in umkehrbar eindeutiger Weise ein Punkt des Bildes. In den genannten Fällen ist das Bild dem Objekte ähnlich (in geometrischem Sinne); eine gerade Strecke von der Länge l, die wir als leuchtendes Objekt wählen, wird also wieder in eine solche abgebildet. Das Bild erfährt dabei gegenüber dem Objekte nur eine Längenänderung, die eine Dehnung oder Verkürzung sein kann; aber die Helligkeitsverhältnisse werden sich wesentlich ändern. Da die Längenänderung für unsere Betrachtung belanglos ist, wollen wir (Fig. 2) die Maßstäbe und Richtungen auf der s-Achse, die mit der Bildgeraden zusammenfallen soll, und der t-Achse, die mit der Richtung der Objektgeraden identisch sei, so wählen, daß $s = t$ ist, wenn s und t zwei sich entsprechende Punkte der Abbildung bedeuten.

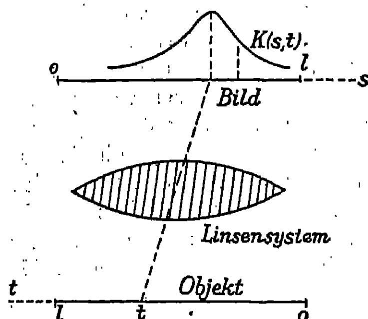


Fig. 2.

Die eben skizzierten Verhältnisse aber bedeuten eine Idealisierung, die der Wirklichkeit nicht ganz entspricht. Die physikalische Optik lehrt vielmehr, daß bei einem optischen Instrumente, wie die genannten, jeder einzelne leuchtende Punkt einen Beitrag zu der Helligkeitsverteilung des ganzen Bildes liefert. Der Grund hierfür ist die Erscheinung der Beugung, und das in dem Instrumente benutzte Blendensystem bedingt wesentlich die von einem Objektpunkte herrührende Helligkeitsverteilung im einzelnen. Diese wird stets an der Stelle $s = t$, d. h. an dem ideellen Bildpunkte, weitaus am größten sein und mit wachsender Entfernung von der Stelle t mehr und mehr abnehmen. Sie ist also eine Funktion von s, wenn wir t festhalten, wird aber andere und andere Werte haben, je nach der Wahl von t; wir wollen sie, wenn wir bei t die Helligkeit 1 annehmen, mit $K(s, t)$ bezeichnen.

Nun ist aber der leuchtende Objektpunkt auch wieder eine Idealisierung; in Wirklichkeit liefert nicht ein Punkt, sondern immer nur ein kleines Linienstück Δt des Objektes die in Rede stehende partielle Helligkeitsverteilung. Bezeichnen wir mit $\eta(t)$ die „Dichte" der Helligkeit des Objektes (analog wie in anderen Fällen die Massen-

dichte oder die Dichte der elektrischen Belegung usw.), so wird die von dem Objektstücke Δt herrührende partielle Helligkeitsverteilung auf der Bildgeraden wiedergegeben durch den Ausdruck $\eta(t)K(s,t)\Delta t$. Hierin ist $K(s,t)$ eine dem Instrumente eigentümliche Funktion, während $\eta(t)$ eine spezifische Eigenschaft des Objektes bedeutet. Die gesamte Helligkeitsverteilung $g(s)$ auf der Bildstrecke entsteht nun durch die Superposition aller Einzeleinflüsse der verschiedenen Teilstrecken Δt des Objektes. Wählen wir diese kleiner und kleiner oder, wie man gewöhnlich sagt, unendlich klein, womit stets ein Grenzübergang gemeint ist, so erhalten wir schließlich in

$$(1) \qquad g(s) = \int_0^l K(s,t)\eta(t)\,dt$$

die Helligkeitsverteilung auf der Bildstrecke.

Aus diesem Zusammenhange (1) erhalten wir je nach der näheren Art der physikalischen Problemstellung die verschiedenen Arten von Integralgleichungen, wie sie in der Definition der Einleitung schon genannt sind. $K(s,t)$ ist stets eine gegebene Funktion, da sie, wie oben schon gesagt, dem verwendeten Instrumente eigentümlich ist. Ist $g(s)$, d. h. die Helligkeitsdichte des Bildes, vorgeschrieben, so wird nach derjenigen Helligkeit des Objektes gefragt, welche die gewünschte auf dem Bilde erzeugt; dann also ist $g(s)$ gegeben und $\eta(t)$ gesucht. Wir haben in diesem Falle in (1) eine *Integralgleichung erster Art* vor uns.

Eine größere physikalische Bedeutung hat die Frage: Wann geschieht die Abbildung so, daß außer der geometrischen Ähnlichkeit auch die Helligkeit des Bildes der des Objektes ähnlich ist? Dann besteht zwischen $g(s)$ und $\eta(s)$ Proportionalität, also

$$(2) \qquad g(s) = \frac{1}{\lambda}\eta(s),$$

und (1) wird, wenn wir jetzt $\varphi(s)$ statt $g(s)$ schreiben,

$$(3) \qquad 0 = \varphi(s) - \lambda\int_0^l K(s,t)\varphi(t)\,dt,$$

d. h. eine *homogene Integralgleichung zweiter Art*, in welcher $\varphi(s)$ die gesuchte Funktion ist; dabei ist außerdem noch die Frage zu klären, ob der Proportionalitätsfaktor λ beliebige Werte haben kann, bzw. für welche Werte von λ das physikalische Problem eine Lösung besitzt.

Ändern wir die physikalische Fragestellung dahin ab, daß der Helligkeitsunterschied zwischen Objektpunkt und Bildpunkt überall einen vorgeschriebenen Wert $f(s)$ haben soll, also

$$\eta(s) - g(s) = f(s), \tag{4}$$

so ergibt sich, wenn wir für $g(s)$ den Ausdruck (1) einsetzen, in

$$f(s) = \eta(s) - \int_0^l K(s,t)\,\eta(t)\,dt \tag{5}$$

eine *inhomogene Integralgleichung zweiter Art*. Hierin ist $\eta(s)$ die gesuchte Funktion.

§ 7. Problemstellung für die Theorie der Integralgleichungen.

Die obigen Überlegungen führen uns dazu, das folgende rein mathematische Problem zu lösen: Gegeben sind die Funktionen $K(s,t)$ und $f(s)$; gesucht wird eine Funktion $\eta(s)$, so daß die Gleichung

$$f(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt \tag{1}$$

identisch in s befriedigt wird. Die Variabeln s und t durchlaufen dabei das Intervall

$$a \leqq s \leqq b \quad \text{bzw.} \quad a \leqq t \leqq b,$$

und den *Kern* $K(s,t)$ wollen wir zunächst als symmetrisch annehmen, d. h. wir setzen

$$K(s,t) = K(t,s)$$

voraus. Die Funktionen $f(s)$ und $K(s,t)$ werden in unseren Beispielen fast immer stetig sein, $K(s,t)$ aber gelegentlich auch unstetig. Für die folgenden mathematischen Ausführungen brauchen wir nur die allgemeinere Voraussetzung, daß $f(s)$ und $K(s,t)$ quadratisch integrabel sind. Wir fordern also, wenn nichts anderes gesagt wird, nur, daß

$$\int_a^b f^2(s)\,ds, \quad \int_a^b\int_a^b K^2(s,t)\,ds\,dt, \quad \int_a^b K(s,t)\,f(t)\,dt$$

existieren und daß das letztere Integral eine Funktion von s ist, die für $a \leqq s \leqq b$ unterhalb einer endlichen Schranke bleibt. λ ist ein beliebiger Zahlenfaktor, den wir den *Parameter der Integralgleichung* nennen wollen. Er kann alle möglichen reellen Werte

haben. Ebenso setzen wir voraus, daß alle auftretenden Funktionswerte reell sind. (Wenn wir gelegentlich komplexe Werte zulassen, soll das besonders gesagt werden.)

Die Fragen, die wir bei diesem Problem (1), das das **Hauptproblem** heißen möge, zu beantworten haben, sind folgende:

I. Für welche Parameterwerte λ hat (1) eine Lösung? (Die Existenzfrage.)

II. Wieviel Lösungen gibt es? (Die Eindeutigkeitsfrage.)

III. Wenn eine Lösung existiert, wie kann sie angegeben werden? (Die Darstellungsfrage.)

Einer von den möglichen Wegen, zu einer erschöpfenden Beantwortung dieser Fragen zu gelangen, führt über die Behandlung der homogenen Gleichung (wie sie z. B. bei den Eigenschwingungen der Saite auftrat)

$$0 = \psi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\psi(t)\,dt. \tag{2}$$

Die Untersuchung dieser Gleichung nennen wir das **homogene Problem**. Hierin liegt die Voraussetzung inbegriffen, daß wir bei dem Hauptprobleme unter $f(s)$ eine Funktion verstehen, welche in dem Intervall $a \leqq s \leqq b$ nicht identisch verschwindet. Dieser Weg, den wir im nächsten Kapitel begehen wollen, bildet den eigentlichen Inhalt der Theorie von E. Schmidt. (Es kann jedem Leser nur dringend empfohlen werden, die Originalabhandlung in den Math. Ann. 63 nachzulesen.)

Der Versuch, unter Benutzung des homogenen Problems (2) das Hauptproblem (1) anzugreifen, ist gar nicht so fernliegend. Wissen wir doch aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen, daß mit der Beherrschung der homogenen Gleichung auch das inhomogene Problem im wesentlichen gelöst ist. Der Gang der Untersuchung im folgenden Kapitel wird daher dieser sein: Zunächst werden wir uns mit dem homogenen Probleme (2) beschäftigen; dabei wird uns natürlich nur der Fall interessieren, bei welchem die Gleichung (2) außer der stets vorhandenen trivialen Lösung $\psi(s) \equiv 0$, die wir hinfort nicht als Lösung ansprechen wollen, noch eine oder mehrere andere Lösungen besitzt. Wir werden eine Reihe von Eigenschaften derjenigen Parameterwerte λ, bei denen dies eintritt, kennenlernen, sowie auch der Funktionen, die nichttriviale Lösungen solcher homogenen Gleichungen (2) sind. Sodann werden wir das inhomogene Problem als ein Problem höherer Stufe ansehen; d. h. wir stellen uns auf den Standpunkt, daß wir das homogene

Problem mit all seinen Lösungen beherrschen und werden sehen, wie wir mit deren Hilfe das Hauptproblem lösen können. Das wird uns dann in jedem Falle gelingen. Wir haben hier eine ganz analoge Einstellung, wie sie uns z. B. aus der Theorie der Differentialgleichungen bekannt ist; eine solche sehen wir als gelöst an, wenn wir die Lösung durch Integrale aus den gegebenen Funktionen darstellen können.

Schon aus dieser Bemerkung ersehen wir, daß für die praktische Anwendung das wichtigste (und oft auch schwierigste) Problem darin bestehen wird, die homogene Gleichung zu durchforschen, d. h. diejenigen Parameterwerte und Lösungsfunktionen ausfindig zu machen, für welche (2) in nichttrivialer Weise befriedigt wird. Denn wenn auch die oben angedeutete allgemeine Lösung des Hauptproblemes mathematisch von hohem Interesse und größter Tragweite ist, so wird der Praktiker doch erst dann sich zufrieden geben können, wenn er die Bausteine im einzelnen und nicht nur gewisse Eigenschaften von ihnen kennt.

Aber auch mit der Eindeutigkeitsfrage (II) ist das homogene Problem aufs engste verknüpft, wie folgende einfache Überlegung zeigt. Nehmen wir einmal an, (1) habe für denselben Parameterwert λ zwei verschiedene Lösungen $\eta_1(s)$ und $\eta_2(s)$, so folgt aus den beiden Gleichungen

$$f(s)=\eta_1(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\,\eta_1(t)\,dt \quad \text{und} \quad f(s)=\eta_2(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\,\eta_2(t)\,dt$$

durch Subtraktion

$$0=\eta_1(s)-\eta_2(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\,[\eta_1(t)-\eta_2(t)]\,dt.$$

Wir erkennen also, daß in diesem Falle notwendigerweise die zugehörige homogene Gleichung (2) eine nichttriviale Lösung besitzt, nämlich $\psi(s)=\eta_1(s)-\eta_2(s)$. Es gilt somit folgender

Satz: *Die inhomogene Gleichung* (1) *kann nur dann mehr als eine Lösung haben, wenn die zugehörige homogene Gleichung* (2) *lösbar ist. Anderenfalls hat also* (1), *wenn überhaupt, nur eine einzige Lösung.*

Aus allen diesen Erwägungen heraus verstehen wir die Notwendigkeit, daß wir uns im ersten Teile des folgenden Kapitels zunächst eingehend mit dem homogenen Probleme beschäftigen.

Manche Anwendungen der mathematischen Physik führen auf ebensolche Integralgleichungen wie die hier genannten; nur sehen sie auf den ersten Blick etwas komplizierter aus. Wenn es sich nämlich nicht um eindimensionale, sondern etwa um zwei- oder drei-

dimensionale Probleme handelt (wie z. B. bei den Randwertaufgaben der Potentialtheorie, vgl. Kap. IV, § 5), so erhalten wir z. B. eine *zweidimensionale* Integralgleichung

$$(1') \qquad f(x, y) = \eta(x, y) - \lambda \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} K(x, y; \mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, \eta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y},$$

bei der an Stelle des Grundintervalles $a \ldots b$ jetzt das Rechteck $a_1 \leqq x \leqq b_1$; $a_2 \leqq y \leqq b_2$ tritt. Diese Gleichung aber wird mit (1) identisch, wenn wir, wie im eindimensionalen Falle von den Punkten s und t, hier von den Punkten $P(x, y)$ und $Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ sprechen; denn dann können wir (1′) in dieser Form schreiben

$$(1'') \qquad f(P) = \eta(P) - \lambda \int_{\Omega} K(P; Q)\, \eta(Q)\, dQ.$$

In (1″) können wir sogar ohne weiteres unter Ω ein beliebiges zwei- bzw. dreidimensionales Grundgebiet verstehen; dQ bedeutet das Flächen- bzw. Raumelement. Alle Sätze und Folgerungen, die wir für das eindimensionale Grundgebiet ableiten werden, gelten sofort auch für den ebenen und räumlichen Fall.

Bevor wir uns nun der eigentlichen Theorie zuwenden, wollen wir in § 8 noch einen in der Folge sehr häufig gebrauchten Satz ableiten, um ihn später jederzeit zur Verfügung zu haben.

§ 8. Die Schwarzsche Ungleichung.

In den späteren Untersuchungen haben wir des öfteren Konvergenzbetrachtungen durchzuführen. Ein wesentliches Hilfsmittel dabei wird die *Schwarzsche Ungleichung* sein, die wir, um hernach nicht den Gedankengang unterbrechen zu müssen, schon vorweg an dieser Stelle formulieren und beweisen wollen. Es gilt der

Satz: *Sind $v(s)$ und $w(s)$ zwei für $a \leqq s \leqq b$ definierte reelle Funktionen, die selbst nebst ihrem Quadrate in diesem Intervalle integrabel sind, so erfüllen sie stets die „Schwarzsche Ungleichung"*

$$(1) \qquad \left(\int_a^b v(s)\, w(s)\, ds\right)^2 \leqq \int_a^b v^2(s)\, ds \cdot \int_a^b w^2(s)\, ds.$$

Um diese Ungleichung zu beweisen, führen wir eine reelle Hilfsvariable x ein; für jeden beliebigen Wert derselben ist

$$y = \int_a^b [x v(s) + w(s)]^2\, ds \geqq 0.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$A = \int_a^b v^2(s)\,ds; \quad B = \int_a^b v(s)\,w(s)\,ds; \quad C = \int_a^b w^2(s)\,ds,$$

so verläuft also die Kurve (Parabel)

$$y = A x^2 + 2 B x + C$$

ganz oberhalb der x-Achse. Jedenfalls kann die Gleichung $A x^2 + 2 B x + C = 0$ nicht zwei verschiedene reelle Wurzeln haben. Da die Wurzeln dieser Gleichung aber durch

$$x_1 = -\frac{B}{A} + \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{B}{A} - \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

gegeben sind, so folgern wir, daß notwendigerweise $B^2 - AC \leqq 0$ sein muß. Das aber ist mit Rücksicht auf die Definition der Größen A, B, C gerade (1).

Aus dieser Herleitung erkennen wir sofort, daß auch die Ungleichungen

$$(1') \qquad \left(\sum_{\nu=1}^{n} v_\nu w_\nu\right)^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^2 \qquad \text{und}$$

$$(1'') \quad \left(\int_a^b\!\!\int_a^b v(s,t)\,w(s,t)\,ds\,dt\right)^2 \leqq \int_a^b\!\!\int_a^b v^2(s,t)\,ds\,dt \cdot \int_a^b\!\!\int_a^b w^2(s,t)\,ds\,dt$$

gelten. Dabei sind in (1′) $v_1, v_2, \ldots v_n$ und $w_1, w_2, \ldots w_n$ irgendwelche reellen Zahlen, in (1″) dagegen $v(s, t)$ und $w(s, t)$ reelle, quadratisch integrable Funktionen der beiden Variabeln s und t. Um (1′) zu beweisen, brauchen wir nur

$$y = \sum_{\nu=1}^{n} (v_\nu x + w_\nu)^2 \geqq 0$$

und

$$A = \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu^2; \quad B = \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu w_\nu; \quad C = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^2$$

zu setzen; dann können wir genau nach demselben Gedankengange, wie oben beim Beweise für (1), verfahren. Ebenso ergibt sich (1″), wenn wir

$$y = \int_a^b\!\!\int_a^b [x\,v(s,t) + w(s,t)]^2\,ds\,dt \geqq 0$$

setzen und analog weiter folgern.

Zweites Kapitel.

Die symmetrische Integralgleichung.

§ 1. Eigenwerte und Eigenfunktionen eines symmetrischen Kernes und ihre einfachsten Eigenschaften.

Auf Grund der Überlegungen des § 7 im vorigen Kapitel gehen wir aus von der homogenen Gleichung

$$(1) \qquad \psi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\psi(t)\,dt.$$

Hier soll $K(s,t)$ symmetrisch und quadratisch integrabel sein; die Gleichung (1) nennen wir verabredungsgemäß nur dann lösbar, wenn sie durch eine nicht identisch verschwindende Funktion $\psi(s)$ befriedigt wird. Für diesen Fall geben wir folgende

Def.: Jeder Parameterwert λ, für welchen (1) eine Lösung besitzt, heißt ein „Eigenwert" des Kernes $K(s,t)$ und jede zugehörige Lösung $\psi(s)$ eine zu dem Eigenwert λ gehörige „Eigenfunktion" des Kernes $K(s,t)$.

Vielleicht ist diese Definition ganz wertlos; wenn sich nämlich herausstellen sollte, daß (1) für alle λ lösbar ist oder für keinen einzigen λ-Wert. So stehen wir sogleich vor der Frage nach der Existenz von Eigenwerten und nach ihrer Verteilung. Über beides werden unsere folgenden Untersuchungen Klarheit schaffen. Jedoch ist die Existenzfrage ein wenig schwieriger zu erledigen, und ihre Behandlung würde uns hier beim Aufbau der Theorie empfindlich stören. Deshalb werden wir uns erst später mit ihr beschäftigen. Damit aber die weiteren Betrachtungen nicht in der Luft schweben, geben wir das Hauptresultat dieser Untersuchung schon hier ohne Beweis an; es gilt der fundamentale

Satz 1: *Jeder symmetrische, quadratisch integrabele Kern $K(s,t)$ besitzt mindestens einen Eigenwert.* (Beweis erfolgt später.)

Unsere erste Aufgabe besteht darin, die allgemeinen Eigenschaften dieser Eigenwerte und Eigenfunktionen herzuleiten. Dabei denken wir uns den Kern $K(s,t)$ und das zugehörige Intervall $a \ldots b$ fest gegeben. Zwei Eigenfunktionen $\psi_1(s)$ und $\psi_2(s)$, die zu verschiedenen Eigenwerten λ_1 und λ_2 gehören, stehen immer in einer ganz bestimmten Beziehung zueinander; sie sind orthogonal. In § 3 von Kap. I kam bei dem Beispiele der schwingenden Saite das Gesetz von der Addition der Energie mathematisch dadurch heraus, daß

die Eigenfunktionen jenes speziellen Kernes diese besondere Integraleigenschaft zeigten; es erwies sich nämlich das Integral eines Produktes zweier verschiedener von ihnen, genommen über das Grundintervall, als Null. Wir wollen nun sehen, daß dies keine zufällige Erscheinung infolge des besonderen physikalischen Ausgangsproblemes ist, sondern daß es sich hierbei um eine für alle symmetrischen Kerne charakteristische Eigenschaft handelt. Aus den beiden Gleichungen

$$\psi_1(s) = \lambda_1 \int_a^b K(s,t)\,\psi_1(t)\,dt \quad \text{und} \quad \psi_2(s) = \lambda_2 \int_a^b K(s,t)\,\psi_2(t)\,dt$$

folgt nämlich, wenn wir die erste mit $\lambda_2 \psi_2(s)$, die zweite mit $\lambda_1 \psi_1(s)$ multiplizieren und dann subtrahieren,

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\,\psi_1(s)\,\psi_2(s) = \lambda_1 \lambda_2 \left\{ \int_a^b K(s,t)\,\psi_1(t)\,\psi_2(s)\,dt - \int_a^b K(s,t)\,\psi_2(t)\,\psi_1(s)\,dt \right\}.$$

Da diese Relation für alle s gilt, können wir auf beiden Seiten nach s integrieren und erhalten

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^b \psi_1(s)\,\psi_2(s)\,ds = \lambda_1 \lambda_2 \left[\int_a^b\!\!\int_a^b K(s,t)\,\psi_1(t)\,\psi_2(s)\,dt\,ds - \int_a^b\!\!\int_a^b K(s,t)\,\psi_2(t)\,\psi_1(s)\,dt\,ds \right].$$

Weil es bei einem bestimmten Integral nicht auf die Bezeichnung der Integrationsvariabeln ankommt, so dürfen wir das letzte Integral rechts mit Vertauschung von s und t auch schreiben als

$$\int_a^b\!\!\int_a^b K(t,s)\,\psi_2(s)\,\psi_1(t)\,ds\,dt.$$

Wenn wir nun noch — und das ist ganz wesentlich — die Symmetrieeigenschaft $K(s,t) = K(t,s)$ berücksichtigen, so erkennen wir, daß die eckige Klammer den Wert 0 hat; es folgt also

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^b \psi_1(s)\,\psi_2(s)\,ds = 0.$$

Wegen unserer Voraussetzung $\lambda_1 \neq \lambda_2$ erhalten wir daher

$$\int_a^b \psi_1(s)\psi_2(s)\,ds = 0. \tag{2}$$

Satz 2: *Gehören die Eigenfunktionen $\psi_1(s)$ und $\psi_2(s)$ eines symmetrischen Kernes zu zwei verschiedenen Eigenwerten, so gilt stets* (2); *d. h. $\psi_1(s)$ und $\psi_2(s)$ sind „orthogonal".*

Wir sagten oben (S. 27), daß es sich, wenn nichts anderes bemerkt wird, nur um reelle Funktionen handeln soll und setzen demgemäß $K(s, t)$ als eine solche voraus. Das dürfen wir; denn wir können ja die Mannigfaltigkeit der gegebenen Funktionen nach Belieben festlegen. Nicht beeinflussen aber können wir in dieser Weise die Eigenwerte und Eigenfunktionen. Diese sind vielmehr durch den betreffenden Kern schon mitbestimmt, sind also ein Attribut des Kernes. Es ist an sich sehr wohl denkbar, daß unter ihnen komplexe Werte vorkommen können, wie z. B. auch viele quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten komplexe Wurzeln haben. Daß es zu einem reellen Eigenwert λ reelle und komplexe Eigenfunktionen gibt, wird sofort durch folgende Überlegung klar: Gehört die reelle Eigenfunktion $\psi(s)$ zu λ, so ist auch — zufolge des homogenen Baues von (1) — jede Funktion $\psi^*(s) = c\psi(s)$ eine zu λ gehörige Eigenfunktion, wobei $c \neq 0$ ein beliebiger reeller oder komplexer Zahlenfaktor ist. Ist aber $\psi(s)$ selbst komplex, so können wir sie in den reellen und imaginären Bestandteil $\psi(s) = u(s) + iv(s)$ trennen und erkennen aus

$$u(s) + iv(s) = \lambda_0 \int_a^b K(s, t)(u(t) + iv(t))\,dt,$$

daß bei reellem λ_0 sowohl $u(s)$ als auch $v(s)$ Eigenfunktion zu λ_0 ist. Wir werden aber sehr bald sehen, daß wir im Falle eines reellen Eigenwertes ohne Beschränkung der Allgemeinheit die komplexen Eigenfunktionen beiseite lassen können. Somit bleibt nur noch die Frage zu beantworten, ob es komplexe Eigenwerte geben kann; und diese ist, wie wir mit Hilfe von Satz 2 jetzt zeigen wollen, zu verneinen. Nehmen wir nämlich an, es gäbe einen komplexen Eigenwert $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, so muß die zugehörige Eigenfunktion notwendigerweise auch komplex sein; es sei $\psi(s) = u(s) + iv(s)$ die Trennung in den Real- und Imaginärbestandteil. Dann folgt aus

$$u(s) + iv(s) = (\alpha + i\beta)\int_a^b K(s, t)(u(t) + iv(t))\,dt$$

auch $$u(s)-iv(s)=(\alpha-i\beta)\int_a^b K(s,t)(u(t)-iv(t))\,dt.$$

Diese letztere Gleichung besagt, daß $\overline{\psi}(s)=u(s)-iv(s)$ Eigenfunktion desselben Kernes zu dem Eigenwerte $\overline{\lambda}_0=\alpha-i\beta$ ist. Da hier λ_0 und $\overline{\lambda}_0$ verschiedene Eigenwerte sind, so entnehmen wir aus Satz 2, daß

$$0=\int_a^b \psi(s)\overline{\psi}(s)\,ds=\int_a^b (u^2(s)+v^2(s))\,ds$$

ist, und das kann, weil ja $u(s)$ und $v(s)$ reelle Funktionen sind, nur durch $u(s)\equiv 0$ und $v(s)\equiv 0$ erfüllt werden; d. h. es folgt mit Notwendigkeit $\psi(s)\equiv 0$, mit anderen Worten die komplexe Zahl λ_0 kann kein Eigenwert sein. Also:

Satz 3: *Alle Eigenwerte eines reellen symmetrischen Kernes sind reell.*

Wir sahen oben schon, daß wir uns aus $\psi(s)$ durch $c\psi(s)$ unendlich viele andere Eigenfunktionen desselben Eigenwertes bilden können; ebenso erhalten wir, wenn etwa $\psi_1(s)$ und $\psi_2(s)$ zwei Eigenfunktionen zu demselben λ_0 sind, in $\psi^*(s)=a_1\psi_1(s)+a_2\psi_2(s)$ unendlich viele weitere, wenn a_1 und a_2 beliebige Zahlfaktoren sind, usw. Nur werden uns diese weiteren Eigenfunktionen gegenüber den ersteren nichts wesentlich Neues bieten, weil sie mit diesen in linearer Abhängigkeit stehen. Diesen Begriff legen wir fest durch die

Def.: Die n Funktionen $\chi_1(s), \chi_2(s), \ldots \chi_n(s)$ heißen für das Intervall $a\ldots b$ linear abhängig, wenn es eine Gleichung der Form

$$a_1\chi_1(s)+a_2\chi_2(s)+\cdots+a_n\chi_n(s)\equiv 0$$

(d. h. für alle s in $a\leqq s\leqq b$) gibt, in der nicht alle $a_\nu=0$ sind; sie heißen linear unabhängig, wenn es keine solche Gleichung gibt.

Hieran schließen wir noch die Definition für zwei Begriffe an, die wir oben schon gelegentlich verwendet haben.

Def.: Eine Funktion $\chi(s)$ heißt für das Intervall $a\ldots b$ normiert, wenn

$$\int_a^b \chi^2(s)\,ds=1 \tag{8}$$

ist. n Funktionen $\chi_1(s), \chi_2(s), \ldots \chi_n(s)$ heißen orthogonal

für das Intervall $a \dots b$, wenn für je zwei verschiedene von ihnen

$$\int_a^b \chi_\varrho(s)\chi_\sigma(s)\,ds = 0 \qquad (\varrho \neq \sigma) \tag{8'}$$

gilt.

Beisp.: 5, $\sin s$, $\cos s$ sind für das Intervall $0 \dots 2\pi$ linear unabhängig; denn aus

$$a_1 \cdot 5 + a_2 \sin s + a_3 \cos s \equiv 0$$

folgt durch Differentiation

$$a_2 \cos s - a_3 \sin s \equiv 0,$$

d. h. (wegen $\sin 0 = 0$) notwendigerweise $a_2 = 0$, also auch $a_3 = 0$, also auch $a_1 = 0$. Dagegen sind 5, $\sin^2 s$, $\cos^2 s$ für das Intervall $0 \dots 2\pi$ linear abhängig wegen

$$-1 \cdot 5 + 5 \cdot \sin^2 s + 5 \cdot \cos^2 s \equiv 0.$$

Ferner sind nach Satz 2 zwei zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenfunktionen stets orthogonal. Für das Intervall $0 \dots 2\pi$ sind z. B. $\sin s$ und $\cos s$ orthogonale Funktionen. Diese sind aber nicht normiert; denn es ist

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 s\,ds = \int_0^{2\pi} \cos^2 s\,ds = \pi.$$

Statt $\sin s$ und $\cos s$ müssen wir, um diese Funktionen zu normieren, $\frac{\sin s}{\sqrt{\pi}}$ und $\frac{\cos s}{\sqrt{\pi}}$ wählen.

Da jedes lineare Aggregat von Lösungen der Gleichung (1) eo ipso wieder eine Lösung ist, rechnen wir nur dann zwei oder mehrere Eigenfunktionen desselben Eigenwertes λ_0 als wesentlich verschieden, wenn sie linear unabhängig sind. Wir wollen annehmen, es seien $\psi_1(s), \psi_2(s), \dots \psi_\varrho(s)$ „verschiedene", d. h. linear unabhängige Eigenfunktionen zu demselben Eigenwerte λ_0. Dann können wir nicht ohne weiteres folgern, daß (2) gilt; denn bei dem obigen Beweise haben wir ja ganz wesentlich benutzt, daß $\lambda_1 \neq \lambda_2$ war. Es werden auch i. a. $\psi_1(s), \dots \psi_\varrho(s)$ gar nicht orthogonal sein. Wir werden nun aber folgendes zeigen: Das System $\psi_1(s), \dots \psi_\varrho(s)$ können wir ersetzen durch ein anderes $\psi_1^*(s), \dots \psi_\varrho^*(s)$ mit den Eigenschaften:

1. Die $\psi_\nu^*(s)$ sind lineare Kombinationen der $\psi_1(s), \dots \psi_\varrho(s)$; d. h. die $\psi_1^*(s), \dots \psi_\varrho^*(s)$ bilden kein wesentlich anderes Lösungssystem als $\psi_1(s), \dots \psi_\varrho(s)$.

2. Die $\psi_\nu^*(s)$ sind linear unabhängig.

3. Die $\psi_\nu^*(s)$ bilden ein System orthogonaler Funktionen (für das Intervall $a \ldots b$); d. h. es gilt $\int_a^b \psi_\mu^*(s)\,\psi_\nu^*(s)\,ds = 0$ bei $\mu \neq \nu$.

4. Alle $\psi_\nu^*(s)$ sind normiert; d. h. es ist stets $\int_a^b \psi_\nu^{*2}(s)\,ds = 1$.

Die hierin ausgesprochene Behauptung beweisen wir, indem wir wirklich ein System $\psi_1^*(s), \psi_2^*(s), \ldots$ bilden. Dazu werden wir zweckmäßigerweise möglichst ökonomisch verfahren; d. h. wir werden bei jedem einzelnen Schritte von dem zur Verfügung stehenden Materiale, nämlich den Funktionen $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots$, immer nur eine neu hinzunehmen. Für $\psi_1^*(s)$ also ziehen wir nur eine der gegebenen Funktionen, etwa $\psi_1(s)$, heran, zur Bildung von $\psi_2^*(s)$ nehmen wir dann noch eine zweite, $\psi_2(s)$, hinzu usw. Demgemäß bauen wir die $\psi_\nu^*(s)$ aus den $\psi_\nu(s)$ nach folgendem Schema auf:

$$\psi_1^*(s) = \frac{1}{c_1}\psi_1(s)$$

$$\psi_2^*(s) = \frac{1}{c_2}[\psi_2(s) - a_{21}\psi_1^*(s)]$$

. . . .

$$\psi_\nu^*(s) = \frac{1}{c_\nu}[\psi_\nu(s) - a_{\nu 1}\psi_1^*(s) - a_{\nu 2}\psi_2^*(s) - \cdots - a_{\nu,\nu-1}\psi_{\nu-1}^*(s)]$$

. . . .

$$\psi_\varrho^*(s) = \frac{1}{c_\varrho}[\psi_\varrho(s) - a_{\varrho 1}\psi_1^*(s) - a_{\varrho 2}\psi_2^*(s) - \cdots - a_{\varrho,\varrho-1}\psi_{\varrho-1}^*(s)].$$

Hierin bestimmen wir die Koeffizienten sukzessive in folgender Weise. c_1 dient nur zur Normierung; wir setzen also

$$c_1 = \sqrt{\int_a^b \psi_1^2(s)\,ds}.$$

Im weiteren werden wir jeweils zuerst die a-Koeffizienten so festlegen, daß die Orthogonalität mit den vorangehenden $\psi^*(s)$ erfüllt ist; dabei bleibt natürlich ein konstanter Zahlenfaktor unbestimmt, und diese c werden wir dann so definieren, daß das betreffende $\psi^*(s)$ normiert ist. Also ergibt sich aus der Forderung

$$\int_a^b \psi_2^*(s)\,\psi_1^*(s)\,ds = 0$$

und mit Beachtung der Normiertheit von $\psi_1^*(s)$ für a_{21} der Wert

$$a_{21} = \int_a^b \psi_2(s)\,\psi_1^*(s)\,ds\,.$$

c_2 ist dann gegeben durch

$$c_2 = \sqrt{\int_a^b (\psi_2(s) - a_{21}\psi_1^*(s))^2\,ds}\,.$$

Es genügt, noch den nächsten Schritt anzugeben und $\psi_3^*(s)$ zu bestimmen. Aus der Forderung

$$\int_a^b \psi_3^*(s)\,\psi_1^*(s)\,ds = \int_a^b \frac{1}{c_3}[\psi_3(s) - a_{31}\psi_1^*(s) - a_{32}\psi_2^*(s)]\,\psi_1^*(s)\,ds = 0$$

folgern wir, da $\psi_1^*(s)$ normiert und $\psi_2^*(s)$ und $\psi_1^*(s)$ orthogonal sind,

$$a_{31} = \int_a^b \psi_3(s)\,\psi_1^*(s)\,ds\,.$$

Analog bestimmt sich der Wert von a_{32} aus der Forderung der Orthogonalität von $\psi_3^*(s)$ und $\psi_2^*(s)$ zu

$$a_{32} = \int_a^b \psi_3(s)\,\psi_2^*(s)\,ds\,.$$

So erkennen wir, wenn wir dieses Verfahren weiter fortgesetzt denken, daß jedesmal

$$a_{\nu\varkappa} = \int_a^b \psi_\nu(s)\,\psi_\varkappa^*(s)\,ds \qquad (\varkappa < \nu)$$

ist; die $c_3, c_4, \ldots c_\varrho$ werden jeweils zur Normierung in analoger Weise festgelegt, wie wir es bei c_1 und c_2 sahen. Nachdem wir so die sämtlichen Konstanten des obigen Schemas bestimmt haben, können wir leicht einsehen, daß die $\psi^*(s)$ tatsächlich die vier geforderten Eigenschaften haben. Die erste, dritte und vierte besitzen sie gemäß der Konstruktion, die wir durchführten und durchführen konnten; denn es kann keine der Zahlen $c_\nu = 0$ sein. Wäre dies nämlich zum ersten Male bei c_μ der Fall, so hätte die Konstruktion Gültigkeit für $\psi_1^*(s), \ldots \psi_{\mu-1}^*(s)$, und man sieht leicht ein, daß dann aus

$$0 = c_\mu = \sqrt{\int_a^b [\psi_\mu(s) - a_{\mu 1}\psi_1^*(s) - \cdots - a_{\mu,\mu-1}\psi_{\mu-1}^*(s)]^2\,ds}$$

mit Notwendigkeit

$$\psi_\mu(s) - a_{\mu 1}\psi_1^*(s) - a_{\mu 2}\psi_2^*(s) - \cdots - a_{\mu,\mu-1}\psi_{\mu-1}^*(s) \equiv 0$$

und also eine lineare Abhängigkeit schon der Funktionen $\psi_1(s), \ldots \psi_\mu(s)$ folgen würde, gegen die Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit der $\psi_1(s), \ldots \psi_\varrho(s)$. Aber auch die zweite Eigenschaft ist erfüllt; denn wäre etwa

$$A_1\psi_1^*(s) + A_2\psi_2^*(s) + \cdots + A_\varrho\psi_\varrho^*(s) \equiv 0$$

und z. B. $A_\varkappa \neq 0$, so folgt durch Multiplizieren mit $\psi_\varkappa^*(s)$ und Integration wegen 3. und 4.

$$0 = \int_a^b A_\varkappa \psi_\varkappa^{*2}(s)\,ds = A_\varkappa.$$

Es müssen also alle $A_\varkappa = 0$ sein, und auch 2. ist erfüllt. Somit haben wir den

Satz 4: *Aus ϱ linear unabhängigen Eigenfunktionen $\psi_1(s), \ldots \psi_\varrho(s)$, die zu demselben Eigenwert gehören, lassen sich durch lineare Kombinationen der $\psi_\nu(s)$ stets ϱ andere linear unabhängige Eigenfunktionen $\psi_1^*(s), \ldots \psi_\varrho^*(s)$ bilden, die orthogonal zueinander und normiert sind.*

Hieran wollen wir noch einige ergänzende Bemerkungen knüpfen: Bringen wir in dem Ausdruck für $\psi_\nu^*(s)$ des obigen Schemas die Funktion $\psi_\nu(s)$ allein auf die eine Seite, so sehen wir, daß wir die Funktionen $\psi_\nu(s)$ in der Art Fourierscher Reihen nach den $\psi_1^*(s)$, $\psi_2^*(s), \ldots$ entwickelt haben. Es ist dies, wie ein Blick auf die Bedeutung der Koeffizienten $a_{\nu\varkappa}$ bestätigt, genau dieselbe Entwicklungsweise, von der schon in § 4, Kap. I, die Rede war und von der im folgenden noch ausführlich zu handeln sein wird. Ferner sehen wir, daß dieses Orthogonalisierungsverfahren durchaus nicht auf Eigenfunktionen beschränkt ist; vielmehr geht es stets bei irgendwelchen im Intervall $a \ldots b$ definierten, linear unabhängigen Funktionen.

Wir wollen dies, gleichzeitig zur Erläuterung des allgemeinen Verfahrens, an einem wichtigen Spezialfalle durchführen. Es seien die Funktionen

$$\psi_1(s) = 1, \quad \psi_2(s) = s, \quad \psi_3(s) = s^2, \quad \psi_4(s) = s^3$$

gegeben mit dem Grundintervalle $-1 \leqq s \leqq +1$. Sie sind linear unabhängig; denn aus

$$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot s + a_3 \cdot s^2 + a_4 \cdot s^3 \equiv 0$$

folgt durch die Spezialisierung $s = 0$ zunächst $a_1 = 0$, dann nach Kürzen

mit s ebenso $a_2 = 0$, usw. Wenden wir nun das oben geschilderte allgemeine Verfahren an, so haben wir

$$\psi_1^*(s) = \frac{1}{c_1} \cdot 1 \quad \text{mit} \quad c_1 = \sqrt{\int_{-1}^{+1} 1^2 \, ds} = \sqrt{2}$$

zu setzen. Ferner ist $\psi_2^*(s) = \frac{1}{c_2}\left[s - a_{21} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$$\text{mit} \qquad a_{21} = \int_{-1}^{+1} s \frac{1}{\sqrt{2}} \, ds = 0 \quad \text{und} \quad c_2 = \sqrt{\int_{-1}^{+1} s^2 \, ds} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ebenso wird $\psi_3^*(s) = \frac{1}{c_3}\left[s^2 - a_{31} \frac{1}{\sqrt{2}} - a_{32} \sqrt{\frac{3}{2}}\, s\right]$.

Hier ist $a_{31} = \int_{-1}^{+1} s^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \, ds = \frac{\sqrt{2}}{3}$ und $a_{32} = \int_{-1}^{+1} s^2 \sqrt{\frac{3}{2}}\, s \, ds = 0$.

Ferner haben wir

$$c_3 = \sqrt{\int_{-1}^{+1} \left(s^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 ds} = \sqrt{\frac{8}{45}}.$$

Endlich ist nach der allgemeinen Vorschrift

$$\psi_4^*(s) = \frac{1}{c_4}\left[s^3 - a_{41} \frac{1}{\sqrt{2}} - a_{42} \sqrt{\frac{3}{2}}\, s - a_{43} \sqrt{\frac{45}{8}} \left(s^2 - \frac{1}{3}\right)\right]$$

anzusetzen. Hierin sind a_{41} und a_{43} Null, weil in den beiden Integralen nur ungerade Potenzen von s auftreten; a_{42} dagegen ist

$$a_{42} = \int_{-1}^{+1} s^3 \psi_2^*(s) \, ds = \int_{-1}^{+1} s^3 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\, s \, ds = \frac{\sqrt{6}}{5}.$$

Für den Normierungsfaktor c_4 ergibt sich

$$c_4 = \sqrt{\int_{-1}^{+1} \left(s^3 - \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{\frac{3}{2}}\, s\right)^2 ds} = \sqrt{\frac{8}{175}}.$$

Mit Benutzung dieser so errechneten Zahlenwerte erhalten wir zusammenfassend

$$\psi_1^*(s) = \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad\qquad = \sqrt{\frac{1}{2}}\, P_0(s),$$

$$\psi_2^*(s) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot s \qquad\qquad = \sqrt{\frac{3}{2}}\, P_1(s),$$

$$\psi_3^*(s) = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{5}{2}}P_2(s),$$

$$\psi_4^*(s) = \sqrt{\frac{7}{2}}\left(\frac{5}{2}s^3 - \frac{3}{2}s\right) = \sqrt{\frac{7}{2}}P_3(s).$$

Die hier eingeführten Polynome $P_0(s), P_1(s), \ldots$ sind die ersten vier speziellen Kugelfunktionen (Legendreschen Polynome). Es läßt sich allgemein zeigen, daß die Orthogonalisierung des Funktionensystemes $1, s, s^2, \ldots s^{\varrho-1}$ auf die ersten ϱ Kugelfunktionen $P_0(s), P_1(s), \ldots P_{\varrho-1}(s)$ führt, wobei $P_\nu(s)$ mit dem Normierungsfaktor $\sqrt{\frac{2\nu+1}{2}}$ multipliziert erscheint. Das alles steht in Übereinstimmung mit den bekannten[1]) Integraleigenschaften der Kugelfunktionen

$$\int_{-1}^{+1} P_\mu(s)P_\nu(s)ds = 0, \qquad (\mu \neq \nu)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu^2(s)ds = \frac{2}{2\nu+1}.$$

Es sind auch die $\psi_\nu^*(s)$ durchaus nicht etwa eindeutig den $\psi_1(s), \ldots \psi_\varrho(s)$ zugeordnet; wenn wir von einer anderen Reihenfolge der $\psi_1(s), \ldots \psi_\varrho(s)$ ausgehen und dasselbe machen würden, so würden wir ein anderes System als $\{\psi_\nu^*(s)\}$ erhalten, aber mit denselben Eigenschaften. Ferner liegt bei dem Beweise, daß kein $c_\nu = 0$ sein kann, die stillschweigende Voraussetzung zugrunde, daß alle $\psi_\nu(s)$ reelle Funktionen sind. Dann sind es gemäß dem oben durchgeführten Orthogonalisierungsverfahren auch alle $\psi_\nu^*(s)$. Und diese Beschränkung auf reelle Eigenfunktionen bedeutet in der Tat keine Beeinträchtigung der Allgemeinheit; denn nehmen wir an, es sei $\psi(s) = u(s) + iv(s)$ eine komplexe Eigenfunktion, so sahen wir ja oben schon, daß dann $u(s)$ und $v(s)$ je eine reelle Eigenfunktion desselben Eigenwertes sind, und statt $\psi(s)$ führen wir in der Reihe $\psi_1(s), \ldots \psi_\varrho(s)$ eben die beiden $u(s)$ und $v(s)$ mit auf (bzw. nur eine von ihnen, wenn sie — was sehr wohl sein kann — linear abhängig sein sollten). Zusammenfassend stellen wir also fest: Die Eigenwerte eines reellen symmetrischen Kernes $K(s, t)$ sind von selbst reell, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir — und das soll in der Folge stets der Fall sein — unter den Eigenfunktionen reelle Funktionen verstehen, die, auch wenn sie zu demselben Eigenwerte

1) Vgl. z. B. F. Neumann, *Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen*, S. 78.

gehören, orthogonal untereinander und normiert sind. Allerdings müssen wir das eben Gesagte im Augenblicke noch insofern etwas einschränken, als das obige Verfahren eine endliche Anzahl von Ausgangsfunktionen voraussetzt; diese Einschränkung wird aber bald fallen, indem wir zeigen werden, daß tatsächlich zu ein und demselben Eigenwerte stets nur endlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen gehören können.

Um diese letzte Frage zu klären und darüber hinaus weitere Aufschlüsse zu gewinnen, stellen wir eine Überlegung an, die auf den ersten Blick etwas abseits vom Hauptwege zu liegen scheint. Denken wir uns irgendein System von endlich oder unendlich vielen im Intervalle $a \dots b$ definierten linear unabhängigen Funktionen $\chi_1(s), \dots \chi_\nu(s), \dots$ fest gegeben, gewissermaßen als eine Basis, so liegt es nahe, zu versuchen, ob und wie sich irgendeine andere Funktion $g(s)$ als lineare Kombination der $\chi_\nu(s)$, also in der Form

$$(4) \quad g(s) = \gamma_1\chi_1(s) + \gamma_2\chi_2(s) + \cdots + \gamma_\nu\chi_\nu(s) + \cdots = \sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu\chi_\nu(s)$$

darstellen läßt. Das wird nicht immer möglich sein, namentlich, wenn nur endlich viele $\chi_\nu(s)$ zur Verfügung stehen.[1]) Aber wenn die Darstellung (4) gilt, wie wir zunächst annehmen wollen, so ist die Hauptfrage die Bestimmung der Koeffizienten γ_ν; und diese löst sich sehr einfach, wenn wir über die $\chi_1(s), \dots \chi_\nu(s), \dots$ noch weiter voraussetzen, daß sie orthogonal und normiert sind, und annehmen, daß (4) im Falle unendlich vieler Glieder gleichmäßig konvergent ist. Dann nämlich folgt aus (4) durch Multiplikation mit $\chi_\varkappa(s)$ und Integration

$$\int_a^b g(s)\chi_\varkappa(s)\,ds = \int_a^b \chi_\varkappa(s)\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu\chi_\nu(s)\,ds = \sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu\int_a^b \chi_\nu(s)\chi_\varkappa(s)\,ds.$$

Die letzte Vertauschung von Summation und Integration ist wegen der Annahme der gleichmäßigen Konvergenz gestattet; und wegen der vorausgesetzten Orthogonalität der $\chi_\nu(s)$ haben alle Integrale mit $\nu \neq \varkappa$ den Wert 0, wegen der Normiertheit das eine mit $\nu = \varkappa$ den Wert 1, die ganze rechte Seite also den Wert $\gamma_\varkappa$. Wir haben somit

$$(5) \qquad \gamma_\varkappa = \int_a^b g(s)\chi_\varkappa(s)\,ds.$$

1) In diesem Falle ist $\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu\chi_\nu(s)$ nur scheinbar eine unendliche Reihe.

Dieses Verfahren der Koeffizientenbestimmung ist altbekannt aus der Theorie der Fourierschen Reihen (nur daß dort noch ein Faktor π hinzukommt, weil eben $\{\sin ns, \cos ns\}$ für $0\ldots 2\pi$ zwar ein Orthogonalsystem, aber kein normiertes bilden). Aus diesem Grunde geben wir folgende

Def.: Wenn $\chi_1(s), \chi_2(s), \ldots \chi_\nu(s), \ldots$ für das Intervall $a\ldots b$ ein System normierter Orthogonalfunktionen bilden, so heißen die Größen (5) die „Fourier-Koeffizienten" der Funktion $g(s)$ in bezug auf dieses System $\{\chi_\nu(s)\}$.

Die Bedeutung der Verwendung von orthogonalen Funktionen beruht auf der Vereinfachung der Rechnung. Wir haben oben angenommen, daß sich die Funktion $g(s)$ exakt mittels des gegebenen Systemes $\{\chi_\nu(s)\}$ in der Form (4) darstellen läßt. Das wird aber, auch wenn dieses System nicht nur endlich viele Funktionen umfaßt, nicht immer möglich sein. An Stelle der Forderung der exakten Darstellung tritt dann die Frage nach einer möglichst guten Approximation der Funktion $g(s)$, und zwar, wenn wir Konvergenzschwierigkeiten vermeiden wollen, mittels endlich vieler Funktionen $\chi_1(s), \chi_2(s), \ldots \chi_m(s)$. Von diesen setzen wir nach wie vor voraus, daß sie orthogonal und normiert sind. Zur genauen Festlegung dieses Problemes bedarf es noch einer Verabredung, was unter möglichst guter Approximation zu verstehen ist. Die wichtigste und meist gebrauchte der verschiedenen Möglichkeiten hierfür besteht in der Forderung, daß das Integral über das Fehlerquadrat ein Minimum sein soll, also

$$J = \int_a^b \Big[g(s) - \sum_{\nu=1}^{m} \gamma_\nu \chi_\nu(s)\Big]^2 ds = \text{Min.}$$

Dieses Minimum ist zu bilden unter allen möglichen Approximations-Versuchen; d. h. es sind, da $g(s)$ und die $\chi_\nu(s)$ fest gegeben sind, vorerst die Faktoren $\gamma_\varkappa$ als Unbestimmte aufzufassen. Wir haben also das Minimum der Funktion $J(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m)$ zu bilden. Dazu ist

$$\frac{\partial J}{\partial \gamma_\varkappa} = \int_a^b 2\Big[g(s) - \sum_{\nu=1}^{m} \gamma_\nu \chi_\nu(s)\Big] \cdot \chi_\varkappa(s)\, ds$$

$$= 2\int_a^b g(s)\chi_\varkappa(s)\, ds - 2\sum_{\nu=1}^{m} \gamma_\nu \int_a^b \chi_\nu(s)\chi_\varkappa(s)\, ds = 0$$

zu setzen. In der letzten Summe aber liefern wegen der vorausgesetzten Orthogonalität alle Glieder den Beitrag Null außer dem

einen für $\nu = \varkappa$. Da die $\chi_\nu(s)$ außerdem normiert sein sollten, so ergibt sich

$$\gamma_\varkappa = \int_a^b g(s)\chi_\varkappa(s)\,ds \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots m).$$

Diese Problemstellung führt also ebenfalls auf die schon in (5) gefundenen Fourierkoeffizienten.

An das Integral über das Fehlerquadrat wollen wir noch eine für unsere weiteren Betrachtungen sehr wichtige Folgerung anknüpfen. Wir können nämlich das Integral

$$J = \int_a^b \Big[g(s) - \sum_{\nu=1}^m \gamma_\nu \chi_\nu(s)\Big]^2 ds$$

ausrechnen; es ist, wenn wir die Quadratur ausführen,

$$J = \int_a^b g^2(s)\,ds - 2\int_a^b g(s)\sum_{\nu=1}^m \gamma_\nu\chi_\nu(s)\,ds + \int_a^b \Big(\sum_{\nu=1}^m \gamma_\nu\chi_\nu(s)\Big)^2 ds.$$

Wegen der Orthogonalität aber fallen in dem letzten Integrale, wenn wir dort ausquadrieren, alle doppelten Produkte fort, und wegen der Normiertheit ist der Faktor von γ_ν^2 stets 1; es ist also, wenn wir noch (5) beachten,

$$J = \int_a^b g^2(s)\,ds - 2\sum_{\nu=1}^m \gamma_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^m \gamma_\nu^2.$$

Somit haben wir die folgende *Besselsche Identität*

$$\text{(6)} \qquad \int_a^b \Big[g(s) - \sum_{\nu=1}^m \gamma_\nu\chi_\nu(s)\Big]^2 ds = \int_a^b g^2(s)\,ds - \sum_{\nu=1}^m \gamma_\nu^2,$$

und da die linke Seite von (6) sicher $\geqq 0$ ist, so folgt weiter die *Besselsche Ungleichung*

$$\text{(7)} \qquad \sum_{\nu=1}^m \gamma_\nu^2 \leqq \int_a^b g^2(s)\,ds.$$

Die Besselsche Ungleichung hat in Verbindung mit dem Beispiele der Saitenschwingung eine sehr augenfällige physikalische Deutung. Sie besagt nämlich, daß bei einer beliebigen freien Schwingung die Gesamtenergie nicht kleiner ist als die Energie einer endlichen Zahl der harmonischen Schwingungen, aus denen diese freie Schwingung sich zusammensetzt. Wir wollen dies der Einfachheit halber nur in

dem Spezialfalle verfolgen, daß im Anfangszustande (vgl. Kap. I, § 4) die Saite in der gestreckten Lage von 0 bis l, aber mit vorgeschriebener Geschwindigkeit der einzelnen Teilchen gegeben ist; also

$$\mathfrak{v}(s,0)=0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{v}(s,\tau)}{\partial \tau}\right)_{\tau=0}=g(s),$$

wenn wieder $\mathfrak{v}(s,\tau)$ den Ausschlag der Saite an der Stelle s zur Zeit τ bedeutet. Außerdem wollen wir die Saite als homogen voraussetzen. Dann ist die (unverändert bleibende) Gesamtenergie der Schwingung gleich der kinetischen Energie für $\tau = 0$, also

$$E_{\text{gesamt}}=\frac{1}{2}\mu\int_0^l g^2(s)\,ds.$$

Die Formel (1′) aus Kap. I, § 4

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{v}(s,\tau)}{\partial \tau}\right)_{\tau=0}=\sum_{h=1}^{\infty} B_h \nu_h \chi_h(s)=g(s)$$

besagt, daß die betrachtete Schwingung gebildet wird durch Superposition der Eigenschwingungen mit den Schwingungszahlen ν_h und den Amplituden $B_h\chi_h(s)$. Wie die Betrachtungen von § 3 in Kap. I uns gelehrt haben, ist aber die Energie einer solchen Eigenschwingung durch

$$E_h=\frac{\nu_h^2}{2}\mu\int_0^l (B_h\chi_h(s))^2\,ds=\frac{1}{2}\mu\nu_h^2 B_h^2$$

gegeben. Die Energie von m dieser Eigenschwingungen ist somit

$$\sum_{h=1}^{m} E_h=\frac{1}{2}\mu\sum_{h=1}^{m}(\nu_h B_h)^2,$$

und diese ist, wie physikalisch sofort evident ist, sicher $\leqq E_{\text{gesamt}}$. Es ist aber

$$\nu_h B_h=\int_0^l g(s)\,\chi_h(s)\,ds=\gamma_h,$$

und demnach

$$\sum_{h=1}^{m} E_h \leqq E_{\text{gesamt}}$$

nichts anderes als die oben allgemein bewiesene Besselsche Ungleichung.

Aus der Besselschen Ungleichung ergibt sich ohne weiteres noch die Konvergenz der unendlichen Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu^2$; denn es ist dies ja eine Reihe mit lauter positiven Gliedern, deren sämtliche Partialsummen, wie wir aus (7) entnehmen, unterhalb einer festen endlichen Zahl bleiben. Wir haben also

Satz 5: *Es sei $g(s)$ eine Funktion, die in dem Intervalle $a \leqq s \leqq b$ quadratisch integrabel ist, und $\{\chi_\nu(s)\}$ für dieses selbe Intervall ein System normierter Orthogonalfunktionen. Dann gilt stets die „Besselsche Ungleichung"*

$$(7) \qquad \sum_{\nu=1}^{m}\gamma_\nu^2 \leqq \int_a^b g^2(s)\,ds \qquad \left(\gamma_\nu = \int_a^b g(s)\,\chi_\nu(s)\,ds\right),$$

und da dies für beliebig großes m gilt, so ist auch die unendliche Summe der Quadrate der Fourierkoeffizienten von $g(s)$, also $\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu^2$, stets konvergent. Auch für diese gilt die Beziehung

$$(7') \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu^2 \leqq \int_a^b g^2(s)\,ds.$$

In dem vorhin genannten Beispiele der freien Schwingung einer Saite werden wir statt der Ungleichung (7′) genauer die Gleichung

$$(7'') \qquad \sum_{h=1}^{\infty}\gamma_h^2 = \int_a^b g^2(s)\,ds$$

haben; denn denken wir an die physikalische Bedeutung, so steht links die Summe der Energien der zusammensetzenden Eigenschwingungen, rechts die Gesamtenergie. Beide sind, wie physikalisch sofort einleuchtet, gleich, und zwar gilt dies stets für alle möglichen Funktionen $g(s)$; denn diese physikalische Tatsache bleibt ja davon unberührt, was für Anfangsgeschwindigkeiten wir den einzelnen Teilchen der Saite zuerteilt denken. Es ist also das Bestehen der Gleichung (7″) eine Eigenschaft des speziellen hier vorliegenden Orthogonalsystemes. Mathematisch haben wir bei (7′) zwischen zwei Möglichkeiten zu unterscheiden; entweder steht immer, d. h. für alle möglichen zulässigen Funktionen $g(s)$, das Gleichheitszeichen, oder aber dies ist nicht immer der Fall. Erfüllt das Orthogonalsystem $\{\chi_\nu(s)\}$ die erste dieser beiden Möglichkeiten, so erhalten wir ein System der zweiten Eigenschaft sogleich einfach dadurch, daß wir

eine oder mehrere der Funktionen $\chi_\nu(s)$ streichen. Eine einzige, etwa $\chi_{\nu_0}(s)$ wegzunehmen, genügt schon; denn ist $g(s)$ irgendeine Funktion, die nicht speziell zu $\chi_{\nu_0}(s)$ orthogonal ist, so gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \gamma_\nu^2 < \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu^2 \leqq \int_a^b g^2(s)\,ds,$$

wo Σ' sich auf das gekürzte System bezieht. Hier also steht in (7′) dann das Ungleichheitszeichen. Diese einfache Überlegung lehrt uns nun umgekehrt: Wenn ein System $\{\chi_\nu(s)\}$ die Eigenschaft hat, daß in (7′) stets das Gleichheitszeichen steht, so können wir sicher das System in keiner Weise durch Hinzufügen einer weiteren Orthogonalfunktion vergrößern. Denn wäre das möglich, so würde ja $\{\chi_\nu(s)\}$ selbst entstehen, indem man von jenem größeren Systeme eine Funktion wegstreicht, und dann könnte gegen die Voraussetzung in (7′) nicht immer das Gleichheitszeichen stehen. Wegen dieser Unmöglichkeit, ein solches System $\{\chi_\nu(s)\}$ zu erweitern, nennt man es ein *abgeschlossenes Orthogonalsystem*.

Def.: Jedes Orthogonalsystem $\{\chi_\nu(s)\}$ mit der besonderen Eigenschaft, daß statt (7′) für alle quadratisch integrabelen Funktionen $g(s)$ die Identität

$$(7'') \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu^2 = \int_a^b g^2(s)\,ds$$

gilt, heißt ein „abgeschlossenes Orthogonalsystem".

Zu dieser Definition sind wir gekommen, indem wir ausgingen von der physikalischen Bedeutung der Besselschen Ungleichung im Falle der Saitenschwingung. Wir wollen uns nun noch die mathematische Bedeutung überlegen und knüpfen dazu an die Besselsche Identität (6) an. Ist $\{\chi_\nu(s)\}$ ein abgeschlossenes Orthogonalsystem, so können wir wegen (7″) in (6) den Wert der rechten Seite durch hinreichend große Wahl des m stets beliebig nahe an Null heranbringen. Das besagt, daß sich in diesem Falle jede zulässige Funktion $g(s)$ durch eine endliche Summe $\gamma_1\chi_1(s) + \cdots + \gamma_m\chi_m(s)$ beliebig genau approximieren läßt, in dem Sinne, daß das Integral über das Fehlerquadrat unterhalb einer vorgeschriebenen Grenze ε bleibt. (Die Anzahl m der benötigten Glieder hängt natürlich von der Wahl des ε und von der Funktion $g(s)$ ab.) Ist umgekehrt diese Approximation immer möglich, so können wir durch hinreichende Vergrößerung von m die rechte Seite von (6) stets $\leqq \varepsilon$ machen, wie $\varepsilon > 0$ auch gewählt wird; und das ist nur ein anderer Ausdruck dafür, daß (7″) gilt. Wir haben also

Satz 6: *Ist* $\{\chi_\nu(s)\}$ *ein abgeschlossenes Orthogonalsystem für das Intervall* $a \leqq s \leqq b$, *so läßt sich jede quadratisch integrable Funktion* $g(s)$ *durch eine endliche „Fourier-Summe" beliebig genau approximieren, derart, daß das Integral über das Fehlerquadrat unterhalb einer vorgeschriebenen Grenze bleibt. Und ist dies für alle* $g(s)$ *möglich, so ist* $\{\chi_\nu(s)\}$ *ein abgeschlossenes Orthogonalsystem.*

Wir bemerken, daß die Besselsche Identität und die Besselsche Ungleichung immer gelten, wenn $\{\chi_\nu(s)\}$ irgendein Orthogonalsystem des Intervalles $a \ldots b$ ist, einerlei was $g(s)$ für eine Funktion ist, wenn nur sie selbst nebst $g^2(s)$ integrierbar ist. Es brauchen also die $\chi_\nu(s)$ nicht etwa Eigenfunktionen eines Kernes zu sein. Umgekehrt aber können wir (6) und (7) sicher anwenden, wenn wir an Stelle des Systemes $\{\chi_\nu(s)\}$ die Eigenfunktionen des Kernes $K(s, t)$ wählen und die oben (S. 41) getroffene Verabredung betreffs der Orthogonalisierung und Normierung innehalten. Das wollen wir nun tun, um die beiden fundamentalen Fragen zu beantworten: 1. Können zu demselben Eigenwerte λ_0 unendlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen gehören? 2. Kann es innerhalb eines endlichen Zahlenintervalles unendlich viele Eigenwerte von $K(s, t)$ geben? Beide Fragen werden wir verneinen können.

Es mögen zu λ_0 die linear unabhängigen Eigenfunktionen $\psi_1(s), \ldots \psi_\varrho(s)$ gehören, die aber nicht die sämtlichen zu λ_0 gehörigen zu sein brauchen[1]; wohl aber sollen sie verabredungsgemäß so gewählt sein, daß sie untereinander orthogonal und normiert sind. Dann können wir also (7) anwenden; dabei wollen wir als $g(s)$ speziell wählen $g(s) = K(s, r)$, indem wir unter r einen beliebigen, aber zunächst festgehaltenen Wert der zweiten Variabelen t verstehen. Die Fourier-Koeffizienten dieser speziellen Funktion $g(s)$ in bezug auf die $\psi_\varkappa(s)$ sind

$$\Gamma_\varkappa = \int_a^b K(s, r)\,\psi_\varkappa(s)\,ds = \int_a^b K(r, s)\,\psi_\varkappa(s)\,ds.$$

Hierbei benutzen wir wiederum die Symmetrie des Kernes; und wenn wir an die Bedingungsgleichung (1) denken (nur die Bezeichnung der Variabeln ist geändert), so folgt

$$(8) \qquad \Gamma_\varkappa = \int_a^b K(s, r)\,\psi_\varkappa(s)\,ds = \frac{\psi_\varkappa(r)}{\lambda_0}.$$

---

1) Diesen Zusatz müssen wir machen, weil es doch sein könnte, daß zu λ_0 unendlich viele Eigenfunktionen gehören.

Somit besagt (7) in unserem Spezialfalle

$$\sum_{\nu=1}^{\varrho} \Gamma_\nu^2 = \frac{1}{\lambda_0^2} \sum_{\nu=1}^{\varrho} \psi_\nu^2(r) \leqq \int_a^b K^2(s,r)\,ds.$$

Diese Abschätzung gilt für jedes r des Intervalles $a \leqq r \leqq b$; also erhalten wir eine weitere richtige Ungleichung, wenn wir über r integrieren

$$\int_a^b \frac{1}{\lambda_0^2} \sum_{\nu=1}^{\varrho} \psi_\nu^2(r)\,dr \leqq \int_a^b\int_a^b K^2(s,r)\,ds\,dr.$$

Da bei Vertauschung der Integration und Summation jedes Integral links den Wert 1 hat, so folgt weiter

$$\frac{\varrho}{\lambda_0^2} \leqq \int_a^b\int_a^b K^2(s,r)\,ds\,dr,$$

d. h., wenn wir das Doppelintegral über das Quadrat des Kernes mit der Konstanten D bezeichnen,

(9) $$\varrho \leqq D\,\lambda_0^2.$$

Es ist somit tatsächlich die erste Frage zu verneinen; d. h. es gilt

Satz 7: *Zu ein und demselben Eigenwerte λ_0 eines symmetrischen Kernes $K(s,t)$ gehören stets nur endlich viele (linear unabhängige) Eigenfunktionen. Eine obere Schranke für diese Anzahl ist gegeben durch* (9), *wobei die Konstante D den Wert hat*

(9′) $$D = \int_a^b\int_a^b K^2(s,t)\,ds\,dt.$$

Um die zweite Frage zu erledigen, nehmen wir an, die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ liegen alle in dem Bereiche $-\Lambda \leqq \lambda \leqq +\Lambda$; dann wollen wir für die Anzahl m auch wieder eine obere Schranke ermitteln. Aus der Eigenschaft, daß diese λ Eigenwerte sind, folgt, daß zu

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$$

mindestens je eine Eigenfunktion

$$\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots \psi_m(s)$$

gehört. Genau dieselbe Überlegung wie oben führt uns dann, ausgehend von $g(s) = K(s, r)$, zu den Fourierkoeffizienten $\Gamma_\nu = \frac{\varphi_\nu(r)}{\lambda_\nu}$. Die Anwendung der Besselschen Ungleichung (7) liefert also

$$\sum_{\nu=1}^{m} \frac{\varphi_\nu^2(r)}{\lambda_\nu^2} \leqq \int_a^b K^2(s, r)\, ds$$

für jedes r, und somit auch

$$\int_a^b \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\varphi_\nu^2(r)}{\lambda_\nu^2}\, dr \leqq \int_a^b\int_a^b K^2(s, r)\, ds\, dr = D.$$

Also ergibt sich, wenn wir die linke Seite ausrechnen,

$$\sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\lambda_\nu^2} \leqq D.$$

Da nun jedes unserer λ_ν nach Voraussetzung in dem Intervall $-A \cdots + A$ liegt, so ist jedesmal $\frac{1}{A^2} \leqq \frac{1}{\lambda_\nu^2}$. Es folgt also aus obiger Ungleichung erst recht $m\frac{1}{A^2} \leqq D$, d. h. es gilt der

Satz 8: *In einem endlichen λ-Bereiche gibt es stets nur endlich viele Eigenwerte; genauer ist eine obere Schranke für die Anzahl m der zwischen $-A$ und $+A$ gelegenen Eigenwerte gegeben durch*

(10) $$m \leqq A^2 D,$$

wo D wieder die Konstante (9′) *bedeutet.*

Die beiden letzten Sätze sind sehr wichtig; einmal ist damit der oben (S. 41) gemachte Vorbehalt hinfällig geworden; denn da es zu jedem Eigenwerte nur endlich viele (linear unabhängige) Eigenfunktionen gibt, ist das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren immer durchführbar. Dann aber gestatten uns Satz 7 und 8 vor allem auch, die Eigenwerte und Eigenfunktionen eines Kernes zu numerieren, was nicht ginge, wenn z. B. alle irrationalen λ-Werte Eigenwerte des Kernes sein könnten. Da aber in jedem endlichen λ-Intervalle nur endlich viele Eigenwerte von $K(s, t)$ liegen, können wir diese der absoluten Größe nach ordnen. Sollten zwei entgegengesetzt gleiche existieren, so wollen wir jedesmal den positiven voranstellen. So können wir folgendes Schema bilden:

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda_1 & \Lambda_2 \ldots & \Lambda_\mu \ldots \\
\psi_{11}(s) & \psi_{21}(s) & \psi_{\mu 1}(s) \\
\psi_{12}(s) & \psi_{22}(s) & \psi_{\mu 2}(s) \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\psi_{1\varrho_1}(s) & \psi_{2\varrho_2}(s) & \psi_{\mu\varrho_\mu}(s).
\end{array}$$

Dabei bedeuten die $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ die verschiedenen Eigenwerte und die Gruppe der darunter stehenden Funktionen ein normiertes Orthogonalsystem von Eigenfunktionen, die zu dem betreffenden Λ_μ gehören, mit der Maßgabe, daß jede weitere Eigenfunktion zu Λ_μ eine lineare Kombination der hier angegebenen ist. Das obige System nennen wir das *vollständige System von Eigenwerten und Eigenfunktionen des Kernes* $K(s,t)$. Die Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\mu, \ldots$, die also angeben, wieviel linear unabhängige Eigenfunktionen es zu dem betreffenden Eigenwerte gibt, heißen die Ordnung desselben.

Das vorstehende Schema gibt zwar eine deutliche Übersicht; für das Rechnen aber sind die doppelten Indizes unbequem; deshalb wollen wir statt der Eigenwerte lieber die Eigenfunktionen durchlaufend numerieren, indem wir zuerst die ϱ_1 Funktionen $\psi_{11}, \psi_{12}, \ldots \psi_{1\varrho_1}$ (in beliebiger Reihenfolge) hinschreiben, dann die ϱ_2 Funktionen $\psi_{21}, \psi_{22}, \ldots \psi_{2\varrho_2}$, usw. So erhalten wir, in Abänderung der Bezeichnung, die Reihen der Eigenfunktionen

$$(11) \qquad \begin{array}{llllll} & \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \ldots \varphi_\nu(s) & \ldots \\ \text{mit} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots \lambda_\nu & \ldots \end{array}$$

als den zugehörigen Eigenwerten. Hier ist also

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{\varrho_1} = \Lambda_1; \quad \lambda_{\varrho_1+1} = \lambda_{\varrho_1+2} = \cdots \lambda_{\varrho_1+\varrho_2} = \Lambda_2; \quad \text{usw.}$$

Durch (11) wollen wir im folgenden immer das vollständige System der Eigenfunktionen und Eigenwerte eines Kernes bezeichnen. Dabei ist also stets

$$(11') \qquad \int_a^b \varphi_\mu(s)\varphi_\nu(s)\,ds = \begin{cases} 0 \text{ für } \mu \neq \nu, \\ 1 \text{ für } \mu = \nu. \end{cases}$$

Wir sahen in Satz 8 schon, daß in jedem endlichen Intervall nur endlich viele der λ_ν liegen können; aber wir können sogleich noch eine weitere Folgerung ziehen, die uns darüber hinaus besagt, daß die λ_ν verhältnismäßig dünn gesät sind; nämlich so dünn, daß

$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ stets konvergent ist. Blicken wir nämlich auf den Beweis von Satz 8 zurück, so sehen wir, daß wir nicht vorauszusetzen brauchten, die $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ seien verschiedene Eigenwerte. Maßgebend war nur, daß wir zu jedem $\lambda_\varkappa$ eine Eigenfunktion $\psi_\varkappa(s)$ zur Verfügung hatten, die mit den anderen orthogonal ist. Wir können also, statt wie dort irgendwelche m Eigenwerte in $-A \cdots + A$ zu wählen, alle $\lambda_1, \ldots \lambda_\nu, \ldots \lambda_n$, soweit $|\lambda_\nu| \leqq A$ ist, nehmen, und dabei jeden einzelnen Eigenwert gerade so oft, wie seine Ordnung angibt; dann ist wie oben

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\lambda_\nu^2} \leqq D, \tag{12}$$

und zwar stets, d. h. wie groß wir auch A wählen. (12) gilt also für jedes beliebige n; und damit ist, wegen $\frac{1}{\lambda_\nu^2} > 0$, die Konvergenz der unendlichen Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ bewiesen. Wir haben somit den

Satz 9: *Die Summe der reziproken Quadrate sämtlicher Eigenwerte eines symmetrischen Kernes ist stets konvergent; dabei sind jedesmal so viel Summenglieder gleich, wie die Ordnung des betreffenden Eigenwertes angibt; mit anderen Worten*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{\varrho_\varkappa}{\Lambda_\varkappa^2} \qquad \textit{ist konvergent.} \tag{12'}$$

Beisp.: 1. Wir betrachten einen ganz einfachen Fall: $K(s, t) = s\,t$ im Intervalle $0 \ldots 1$. (1) besagt

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^1 s t \varphi(t) dt = s\,c.$$

Setzen wir diesen Wert für $\varphi(s)$ in (1) ein, so rechnen wir λ aus, nämlich

$$s c = \lambda \int_0^1 s t \cdot t c\, dt = c \lambda s \frac{1}{3}.$$

Dies ergibt eindeutig für λ den Wert $\lambda = \lambda_1 = 3$, und die einzige (normierte) Eigenfunktion, die zu diesem einzigen Eigenwerte gehört, ist $\varphi(s) = \sqrt{3}\, s$.

2. Ein wenig umständlicher ist schon die Bestimmung von (11) für $K(s,t) = s + t$ im Intervalle $0 \ldots 1$. (1) liefert

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^1 (s+t)\varphi(t)\,dt = c_1 s + c_2.$$

Setzen wir $c_1 s + c_2$ für $\varphi(s)$ in (1) ein, so erhalten wir

$$c_1 s + c_2 = \lambda \int_0^1 (s+t)(c_1 t + c_2)\,dt = s\lambda \int_0^1 (c_1 t + c_2)\,dt + \lambda \int_0^1 (c_1 t^2 + c_2 t)\,dt,$$

also, da dies für alle s in $0 \ldots 1$ gelten muß,

$$c_1 = \lambda c_1 \cdot \frac{1}{2} + \lambda c_2 \quad \text{und} \quad c_2 = \lambda c_1 \cdot \frac{1}{3} + \lambda c_2 \cdot \frac{1}{2}.$$

Dividieren wir beide Male durch c_2 und eliminieren wir $\frac{c_1}{c_2}$, so erhalten wir für λ die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 + 12\lambda - 12 = 0$$

und also die beiden Eigenwerte

$$\lambda_1 = 4\sqrt{3} - 6 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -4\sqrt{3} - 6.$$

Um die zugehörigen Eigenfunktionen auszurechnen, setzen wir diese Werte λ_1 und λ_2 z. B. in $c_2 = \left(\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{2}\right)\lambda$ ein und erhalten so das erstemal für $\frac{c_1}{c_2}$ den Wert $+\sqrt{3}$, das zweitemal $-\sqrt{3}$. Somit ist das System (11) in diesem Spezialfalle, wenn wir noch den Normierungsfaktor beachten,

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}(1 + \sqrt{3}s) \qquad \varphi_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}(1 - \sqrt{3}s)$$

$$\lambda_1 = +4\sqrt{3} - 6 \qquad\qquad \lambda_2 = -4\sqrt{3} - 6.$$

Nach Satz 2 müssen $\varphi_1(s)$ und $\varphi_2(s)$, da sie zu verschiedenen Eigenwerten gehören, orthogonal sein; in der Tat ist

$$\int_0^1 \varphi_1(s)\varphi_2(s)\,ds = \int_0^1 (1 + \sqrt{3}s)(1 - \sqrt{3}s)\,ds = 0.$$

3. Wir wollen das System (11) noch einmal direkt für den Kern

$$K(s,t) = \frac{1}{l} \cdot \begin{cases} s(l-t) & \text{für} \quad s \leq t, \\ t(l-s) & \text{für} \quad s \geq t \end{cases}$$

und das Intervall $0 \ldots l$ bestimmen. In Kap. I haben wir schon gesehen, daß $K(s, t) = K(t, s)$ ist. (1) wird hier

$$\varphi(s) = \lambda \frac{1}{l} \int_0^s t(l - s) \varphi(t)\, dt + \lambda \frac{1}{l} \int_s^l s(l - t) \varphi(t)\, dt.$$

Jetzt können wir zwar nicht wie bei 1. und 2. verfahren; da aber die Variable s im Integranden nur linear auftritt, so können wir sie durch Differenzieren beseitigen. Wir erhalten so

$$\varphi'(s) = -\lambda \frac{1}{l} \int_0^s t \varphi(t)\, dt + \lambda \frac{1}{l} \int_s^l (l - t) \varphi(t)\, dt.$$

(Die beiden anderen Glieder heben sich gerade auf.) Nochmalige Differentiation ergibt, ausgerechnet,

$$\varphi''(s) = -\lambda \varphi(s).$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind $\sin \sqrt{\lambda} s$ und $\cos \sqrt{\lambda} s$. Nun aber kommen für uns nicht alle diese Lösungen in Betracht; denn die Ausgangsgleichung für $\varphi(s)$ besagt, daß $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(l) = 0$ sein müssen. Somit scheiden die $\cos \sqrt{\lambda} s$ von vornherein aus; und wegen $\sin \sqrt{\lambda}\, l = 0$ erhalten wir $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ als die einzig in Frage kommenden Werte von λ. Für diese ist aber dann, wie man direkt nachrechnen kann, $\sin \frac{n\pi}{l} s$ eine Lösung von (1). Es ist also das gesuchte System (11) in diesem Beispiele, wenn wir noch normieren,

$$\varphi_1(s) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi s}{l} \qquad \varphi_2(s) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi s}{l} \cdots \varphi_\nu(s) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\nu \pi s}{l} \cdots$$

$$\lambda_1 = \frac{1^2 \pi^2}{l^2} \qquad \lambda_2 = \frac{2^2 \pi^2}{l^2} \qquad \cdots \qquad \lambda_\nu = \frac{\nu^2 \pi^2}{l^2} \cdots.$$

Dieses Ergebnis bestätigt uns Satz 9; denn $\frac{l^4}{\pi^4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^4}$ ist konvergent.

Es gibt also zu jedem symmetrischen Kerne $K(s, t)$ ein ganz bestimmtes System (11). (Die einzige Unbestimmtheit, die im Falle mehrfacher Eigenwerte in der verschiedenen Möglichkeit der Auswahl der zugehörigen Eigenfunktionen besteht, ist belanglos, da ja stets das eine System eine lineare Kombination des anderen ist.) Die Aufstellung des Systemes (11) ist gleichbedeutend mit der vollständigen Auflösung der homogenen Gleichung (1); und da hierin keine fremde Funktion auftritt, da also mit anderen Worten (11) eine Eigenschaft des gegebenen Kernes $K(s, t)$ ist, so sehen wir auch (11) als mit dem Kerne gegeben an. Dies ist der Sinn der obigen Be-

merkung (S. 27), daß wir das homogene Problem als ein solches niederer Stufe ansehen wollen. Bevor wir uns nun zu dem Hauptprobleme, der Auflösung der inhomogenen Gleichung wenden, wollen wir uns noch einen wichtigen Zusammenhang zwischen dem Kerne und dem zugehörigen Systeme (11) klarmachen und die *Bilinearreihe* für den Kern kennenlernen.

Wenn wir an die Entwicklung (4) und das dort Gesagte denken und statt des Systemes $\{\chi_\nu(s)\}$ speziell das vollständige System der Eigenfunktionen $\{\varphi_\nu(s)\}$ wählen, so liegt der Versuch nahe, den Kern $K(s, t)$ nach seinen Eigenfunktionen zu entwickeln. Verstehen wir unter t zunächst einen konstant gehaltenen, aber beliebig herausgegriffenen Wert der zweiten Variabeln, so ist $K(s, t)$ eine Funktion nur von s, und wir sahen schon oben in (8), daß deren Fourierkoeffizienten in bezug auf $\{\varphi_\nu(s)\}$ durch $\frac{\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$ gegeben sind. Wir stellen also fest: Wenn sich $K(s, t)$, aufgefaßt als Funktion von s, in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach seinen Eigenfunktionen entwickeln läßt, so heißt die Entwicklung

$$K(s,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}. \tag{13}$$

Diese Beziehung ist um so wichtiger, als sie in sehr vielen physikalischen Anwendungen gilt. Leider aber ist, wie wir später noch genauer sehen werden, für beliebige Kerne, die den obigen Voraussetzungen genügen, diese Entwicklung nicht immer möglich. Wohl aber können wir die folgende Frage aufwerfen: Wenn die Reihe in (13) gleichmäßig konvergent ist, stellt sie dann stets den Kern $K(s, t)$ dar? Wir werden durch eine einfache, aber für diesen ganzen Ideenkreis charakteristische Betrachtung sehen, daß sie zu bejahen ist. Nehmen wir nämlich an, es sei, trotz der gleichmäßigen Konvergenz,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} \neq K(s,t),$$

so ist
$$K^*(s,t) = K(s,t) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$$

ein in demselben Intervalle $a \ldots b$ gegebener symmetrischer Kern. Es muß also nach Satz 1 auch $K^*(s, t)$ mindestens einen Eigenwert μ mit zugehöriger Eigenfunktion $\psi(s)$ haben. Wir stellen erstens fest, daß $\psi(s)$ zu allen $\varphi_\varkappa(s)$ orthogonal ist; denn es ist

$$\int_a^b \varphi_\varkappa(s)\psi(s)ds = \int_a^b \varphi_\varkappa(s)\left(\mu\int_a^b K^*(s,t)\psi(t)dt\right)ds$$

$$= \mu\int_a^b \psi(t)\left[\int_a^b\left(K(s,t) - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}\right)\varphi_\varkappa(s)ds\right]dt.$$

Hier aber ist, wegen der festgelegten Bedeutung der $\varphi_\nu(s)$ und der vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz, welche die Vertauschung von Integration und Summation gestattet, das in der eckigen Klammer stehende Integral Null; es ist also die Orthogonalität von $\psi(s)$ zu allen $\varphi_\varkappa(s)$ bewiesen. Zweitens folgern wir hieraus, daß $\psi(s)$ auch der homogenen Gleichung mit $K(s,t)$ genügt; denn es ist

$$\psi(s) = \mu\int_a^b K^*(s,t)\psi(t)dt = \mu\int_a^b\left[K(s,t) - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}\right]\psi(t)\,dt.$$

Hier fällt das letzte Glied mit der Summe fort, weil wir eben ja festgestellt haben, daß alle

$$\int_a^b \varphi_\nu(t)\psi(t)dt = 0$$

sind; demnach müßte $\psi(s)$, wenn es nicht identisch verschwindet, Eigenfunktion von $K(s,t)$ sein, d. h. es wäre mit einem der $\varphi_\nu(s)$ identisch, bzw. eine lineare Verbindung von solchen, dann aber kann es nicht zu allen $\varphi_\nu(s)$ orthogonal sein, wie wir es eben bewiesen haben; also ist notwendigerweise $\psi(s) \equiv 0$. Mit anderen Worten $K^*(s,t)$ hat keine Eigenfunktion, also muß es wegen Satz 1 selbst identisch 0 sein, d. h. es gilt (13) und der

Satz 10: *Wenn die Reihe* $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$ *gleichmäßig konvergiert, so stellt sie stets den Kern $K(s,t)$ dar. Das ist also speziell dann immer der Fall, wenn der Kern nur endlich viele Eigenwerte besitzt.*

Man nennt die Reihe (13) die *Bilinearreihe* für den Kern $K(s,t)$, weil bei festgehaltenem t dadurch $K(s,t)$ als lineares Aggregat der $\varphi_\nu(s)$ dargestellt wird und analog für festgehaltenes s. Die obigen Beispiele 1 und 2 bestätigen den Satz 10 für den Fall, daß nur endlich viele Eigenwerte vorhanden sind. Aber auch für den allgemeinen Fall haben wir in Beispiel 3 einen Beleg.

Es ist nämlich die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2l \sin\frac{\nu\pi s}{l} \sin\frac{\nu\pi t}{l}}{\nu^2\pi^2}$$

ganz gewiß gleichmäßig konvergent, da $\frac{2l}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$ eine konvergente Majorante ist. Hier sind wir nun in der Lage, mit Hilfe der Fourierschen Reihen direkt die Identität dieser Summe mit jenem $K(s, t)$ nachweisen. Setzen wir nämlich $\frac{\pi}{l}s = x$, so entspricht $0 \leqq x \leqq \pi$ dem Intervall $0 \leqq s \leqq l$, und es gilt also die Entwicklung in die Sinusreihe

$$g(s) = K(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin\frac{\nu\pi s}{l}$$

mit[1])

$$b_\nu = \frac{2}{l}\int_0^l g(s)\sin\frac{\nu\pi s}{l}\,ds.$$

Ausgerechnet ergibt dies, wie der Leser selbst nachprüfen möge,

$$b_\nu = \frac{2l}{\nu^2\pi^2}\sin\frac{\nu\pi t}{l} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Es ist also tatsächlich

$$K(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\nu\pi s}{l}\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\nu\pi t}{l}}{\frac{\nu^2\pi^2}{l^2}}.$$

Wir wenden uns nun zu dem Hauptprobleme, der Lösung der inhomogenen Gleichung, und werden dieses zunächst nur für eine bestimmte Gruppe von Kernen, nämlich für diejenigen, welche die Entwicklung (18) gestatten, erledigen. Erst im Anschluß daran werden wir, unter Zuhilfenahme der sogenannten iterierten Kerne, diese Einschränkung fallen lassen.

§ 2. Die Lösung der inhomogenen Gleichung für Kerne mit Bilinearentwicklung.

Das Hauptproblem besteht in der Lösung der inhomogenen Gleichung

(1) $$f(s) = \eta(s) - \lambda\int_a^b K(s, t)\,\eta(t)\,dt,$$

---

1) Es steht hier statt des üblichen $\frac{1}{\pi}$ der Faktor $\frac{2}{l}$ vor den Integralen, weil wir das Intervall $0 \ldots l$ zugrunde gelegt haben.

wo $f(s)$ eine beliebige gegebene (quadratisch integrable) Funktion ist. Es handelt sich um die Fragen: 1. Existiert $\eta(s)$, bzw. für welche Parameterwerte λ existiert es? (Wir bemerken schon hier, daß eigentlich exakter $\eta(s, \lambda)$ zu schreiben wäre; doch wollen wir einstweilen $\eta(s)$ beibehalten. Wir werden aber später noch des näheren von der Abhängigkeit von λ zu sprechen haben.) 2. Wie können wir $\eta(s)$ darstellen?

Zunächst wollen wir an einem einfachen Beispiele sehen, daß (1) nicht in allen Fällen eine Lösung zu besitzen braucht. Es sei speziell die *freie Funktion* $f(s)$ als $\varphi_\varkappa(s)$ gegeben, also zufällig mit einer Eigenfunktion von $K(s, t)$ identisch; und λ sei gerade der zugehörige Eigenwert. Mit anderen Worten, es handle sich speziell um die Gleichung

$$\varphi_\varkappa(s) = \eta(s) - \lambda_\varkappa \int_a^b K(s, t)\, \eta(t)\, dt.$$

Wir überzeugen uns, daß diese unlösbar ist; denn nehmen wir an, $\eta(s)$ existiere in diesem Falle, so würde durch Multiplikation mit $\varphi_\varkappa(s)$ und Integration folgen

$$1 = \int_a^b \eta(s)\, \varphi_\varkappa(s)\, ds - \lambda_\varkappa \int_a^b\int_a^b K(s, t)\, \eta(t)\, \varphi_\varkappa(s)\, dt\, ds.$$

Wenn wir in dem letzten Gliede die Integration nach s ausführen, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Definitionsgleichung von $\varphi_\varkappa(s)$

$$1 = \int_a^b \eta(s)\, \varphi_\varkappa(s)\, ds - \lambda_\varkappa \int_a^b \eta(t)\, \frac{\varphi_\varkappa(t)}{\lambda_\varkappa}\, ds = 0.$$

Also ist die Annahme der Lösbarkeit in diesem Spezialfalle unhaltbar.

Der Leser wird richtig vermuten, daß dieses unerwünschte Ergebnis damit zusammenhängt, daß wir λ speziell mit einem Eigenwerte identifiziert haben. Wir wollen deshalb im folgenden einstweilen die Annahme

$$\lambda \neq \lambda_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

machen. Darüber hinaus aber wollen wir in diesem ganzen Paragraphen von dem zugrunde gelegten Kerne noch voraussetzen, daß er nach seinen Eigenfunktionen entwickelbar sei, daß also die bilineare Darstellung

$$K(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\, \varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} \tag{2}$$

gilt; die Summe soll gleichmäßig konvergent sein.

Wir betrachten nun nochmals die spezielle Gleichung

$$(1') \qquad \varphi_\varkappa(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt \qquad (\lambda \neq \lambda_\nu)$$

und werden sie leicht lösen können. Es liegt nämlich nahe, einen solchen Ansatz für $\eta(s)$ zu suchen, daß (1') in die homogene Gleichung für $\varphi_\varkappa(s)$ übergeht. Dazu setzen wir versuchsweise

$$\eta(s) = c\,\varphi_\varkappa(s)$$

und erhalten so aus (1') eine Bedingungsgleichung für c

$$(c-1)\,\varphi_\varkappa(s) = \lambda c \int_a^b K(s,t)\,\varphi_\varkappa(t)\,dt.$$

Diese Gleichung ist dann und nur dann richtig, wenn $\frac{\lambda c}{c-1} = \lambda_\varkappa$ ist, wodurch c eindeutig bestimmt ist. Wir haben somit das Resultat, daß (1') eine und nur eine Lösung, nämlich

$$\eta(s) = \frac{\lambda_\varkappa}{\lambda_\varkappa - \lambda}\,\varphi_\varkappa(s)$$

besitzt. (Wegen unserer Annahme $\lambda \neq \lambda_\nu$ kann der Nenner nicht Null sein.)

Nehmen wir in (1') statt $\varphi_\varkappa(s)$ als freie Funktion $\gamma_\varkappa \varphi_\varkappa(s)$, wo $\gamma_\varkappa$ eine beliebige Konstante sei, so haben wir offensichtlich als Lösung

$$\eta(s) = \gamma_\varkappa \frac{\lambda_\varkappa}{\lambda_\varkappa - \lambda}\,\varphi_\varkappa(s).$$

Wählen wir weiter in (1) als freie Funktion speziell $\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \varphi_\nu(s)$, wo die γ_ν irgendwelche Konstanten sind, so erkennen wir, daß dann die Lösung durch

$$\eta(s) = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}\,\varphi_\nu(s)$$

gegeben ist; denn (1) wird ja jedesmal durch die entsprechenden Glieder einzeln befriedigt.

Wir wollen jetzt einmal annehmen, es ließe sich in (1) die freie Funktion in die gleichmäßig konvergente Reihe

$$(3) \qquad f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu \varphi_\nu(s)$$

entwickeln; dann sind nach (5), § 1, die γ_ν bestimmt als

$$\gamma_\nu = \int_a^b f(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{3'}$$

Nach unserer letzten Überlegung ist hier die Lösung von (1) formal gegeben durch

$$\eta(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu \frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}\,\varphi_\nu(s) \tag{4}$$

und auch wirklich; denn (4) konvergiert gleichmäßig. Dieses letztere folgt sofort aus der Annahme der gleichmäßigen Konvergenz von (3), da dieser gegenüber die Summenglieder in (4) nur mit dem Faktor $\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}$ multipliziert sind; dieser ist von einem gewissen ν an positiv und strebt mit wachsendem ν gegen 1. Damit haben wir den

Satz 1: *Wenn sich in* (1) *die freie Funktion* $f(s)$ *in die gleichmäßig konvergente Reihe* (3) *entwickeln läßt (die auch speziell endlich sein kann), so existiert für jedes* $\lambda \neq \lambda_\nu$ *eine Lösung; sie ist gegeben durch* (4), *wo* γ_ν *die Fourierkoeffizienten* (3') *von* $f(s)$ *inbezug auf das System* $\{\varphi_\nu(s)\}$ *bedeuten.*

Die Gültigkeit der Entwicklung (3) aber war eine spezielle Annahme, die nicht immer erfüllt ist; vielmehr wird i. a. diese formal gebildete Reihe divergent sein. Dann ist es auch die in der Lösung (4). Wir können aber, wenn wir im Augenblicke noch an der Konvergenz von (3) festhalten, (4) ein wenig umformen. Es ist nämlich

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu \frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}\,\varphi_\nu(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu \varphi_\nu(s) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}\,\varphi_\nu(s).$$

Demnach können wir die Lösung auch schreiben in der Gestalt

$$\eta(s) = f(s) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}\,\varphi_\nu(s). \tag{5}$$

Wir werden uns davon überzeugen, daß die in (5) stehende Reihe stets gleichmäßig konvergent ist, also auch, wenn die Entwicklung (3) gar nicht existiert. Haben wir dies festgestellt, so liegt die Vermutung nahe, daß (5) in allen Fällen die Lösung von (1) liefert. (Eine zweite kann es ja nach dem Satze S. 28 nicht geben.) Danach ist der weitere Gang der Untersuchung vorgezeichnet:

1. Wir werden die gleichmäßige Konvergenz der Reihe in (5) nachweisen; damit ist gezeigt, daß der Ausdruck rechts in (5) stets wirklich einen Sinn hat.

2. Wir müssen dann noch beweisen, daß diese Funktion tatsächlich der Gleichung (1) genügt, was wir bis jetzt nur in dem Spezialfalle der Gültigkeit von (3) wissen.

Um den ersten Teil dieses Programmes zu erledigen, beweisen wir zunächst einen von E. Schmidt herrührenden

Hilfssatz: *Ist $f(s)$ irgendeine für das Intervall $a \ldots b$ quadratisch integrable Funktion, so ist die Reihe*

$$S = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(s) \qquad \left(\gamma_\nu = \int_a^b f(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds\right)$$

stets absolut und gleichmäßig konvergent, also speziell auch dann, wenn die Fourierentwicklung von $f(s)$ nach diesem Orthogonalsysteme $\{\varphi_\nu(s)\}$ nicht gilt.

Dazu müssen wir zeigen, daß es zu jeder beliebig vorgegebenen Abweichungsgrenze $\varepsilon > 0$ ein N gibt, so daß für alle $n > N$ stets der Reihenrest

$$\left| \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(s) \right| < \varepsilon$$

ist, und zwar gleichzeitig für alle s in $a \ldots b$. Da wir noch nichts über die Konvergenz wissen, gehen wir aus von dem endlichen Summenabschnitte

$$\sum_{\nu=n}^{n+p} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(s) = \sum_{\nu=n}^{n+p} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu} \cdot \lambda_\nu \int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

oder, da wir wegen der endlich vielen Summenglieder vertauschen dürfen,

$$\sum_{\nu=n}^{n+p} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(s) = \int_a^b K(s,t) \sum_{\nu=n}^{n+p} \gamma_\nu \varphi_\nu(t)\,dt,$$

Dabei sind n und $p > 0$ einstweilen ganz beliebig herausgegriffen. Hierauf wenden wir nun, indem wir s festgehalten denken, die in Kap. I, § 8, bewiesene Schwarzsche Ungleichung mit

$$v(t) = K(s,t) \quad \text{und} \quad w(t) = \sum_{\nu=n}^{n+p} \gamma_\nu \varphi_\nu(t)$$

an und erhalten

$$\left(\sum_{\nu=n}^{n+p} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(s)\right)^2 \leqq \int_a^b K^2(s,t)\,dt \int_a^b \left(\sum_{\nu=n}^{n+p} \gamma_\nu \varphi_\nu(t)\right)^2 dt.$$

Nach unseren allgemeinen Voraussetzungen ist $\int_a^b K^2(s,t)\,dt$ eine für $a \leqq s \leqq b$ beschränkte Funktion; d. h. es gibt eine endliche Konstante C, so daß für alle s in $a \ldots b$

$$\int_a^b K^2(s,t)\,dt \leqq C$$

ist. Den zweiten Faktor in der obigen Ungleichung können wir auch wesentlich vereinfachen; denn denken wir uns die Summe ausquadriert, so fallen wegen der Orthogonalität alle doppelten Produkte fort; und wegen der Normiertheit werden die Integralfaktoren der Quadrate jedesmal 1. Wir erhalten also

$$\left(\sum_{\nu=n}^{n+p} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(s)\right)^2 \leqq C \sum_{\nu=n}^{n+p} \gamma_\nu^2 \leqq C \sum_{\nu=n}^{\infty} \gamma_\nu^2,$$

und zwar, wie wir schon hier bemerken wollen, gleichmäßig für alle s in $a \ldots b$. Nach Satz 5 in § 1 aber ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu^2$ konvergent; wir können also in der letzten Abschätzung durch hinreichende Vergrößerung von n die rechte Seite unabhängig von p beliebig klein machen. Die absolute Konvergenz ergibt sich, und zwar auch gleichmäßig, durch genau dieselbe Abschätzung, wenn wir diese einmal nur auf die positiven und das andere Mal nur auf die negativen Glieder anwenden. Damit ist der Schmidtsche Hilfssatz bewiesen.

Nun ist die in (5) stehende Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(s);$$

sie entsteht also aus der soeben als gleichmäßig konvergent nachgewiesenen Reihe durch Multiplikation der einzelnen Glieder mit $\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}$. Dieser Faktor aber ist von einem gewissen ν an stets positiv und strebt mit wachsendem ν gegen 1 (wegen $\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}}$ und

$\lambda_\nu \to \infty$). Daraus folgt, wie ein elementarer Satz der Reihentheorie lehrt und wie man sich auch sehr leicht selber überlegen kann, daß ebenfalls die in (5) stehende Reihe gleichmäßig konvergent ist. Es ist also 1., d. h. die Existenz der durch (5) definierten Funktion $\eta(s)$ bewiesen. Es bleibt uns nun nur noch die Erledigung von 2. übrig, d. h. nachzuweisen, daß dieses $\eta(s)$ tatsächlich Lösung von (1) ist. Dazu bezeichnen wir

$$F(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt,$$

wo also $\eta(s)$ die durch (5) definierte Funktion ist, und haben unser Ziel erreicht, wenn sich $F(s) - f(s) \equiv 0$ herausstellt. Wir haben

$$F(s) - f(s) = \lambda \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}\,\varphi_\nu(s) - \int_a^b K(s,t)\left[f(t) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}\,\varphi_\nu(t)\right] dt \right\}.$$

Hierin ist wegen der Voraussetzung (2) der erste Teil des Integrales

$$\int_a^b K(s,t) f(t)\,dt = \int_a^b \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}\, f(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu}\,\varphi_\nu(s).$$

Der zweite Teil liefert wegen der eben bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz der Summe

$$\int_a^b K(s,t)\,\lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}\,\varphi_\nu(t)\,dt = \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(t)\,dt$$

$$= \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{(\lambda_\nu - \lambda)\lambda_\nu}\,\varphi_\nu(s).$$

Es ist also

$$\int_a^b K(s,t)\left[f(t) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}\,\varphi_\nu(t)\right] dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}\,\varphi_\nu(s)$$

und tatsächlich $F(s) - f(s) \equiv 0$.

Satz 2: *Unter der Voraussetzung der Entwickelbarkeit des Kernes $K(s,t)$ in die gleichmäßig konvergente Bilinearreihe (2) besitzt die*

inhomogene Gleichung (1) *für alle* $\lambda \neq \lambda_\nu$ *eine (und nur eine) Lösung. Diese ist gegeben durch*

$$(5) \qquad \eta(s) = f(s) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(s),$$

wo die γ_ν *die Fourierkoeffizienten von* $f(s)$ *inbezug auf das System* $\{\varphi_\nu(s)\}$ *bedeuten.* **(E. Schmidtsche Auflösungsformel.)**

Prüfen wir dieses Ergebnis im Falle des Kernes $K(s,t) = st$ nach (vgl. Beisp. 1) S. 51, so handelt es sich um die Gleichung

$$f(s) = \eta(s) - \lambda \int_0^1 st\, \eta(t)\, dt,$$

und $\eta(s)$ ist nach Satz 2 gegeben durch

$$\eta(s) = f(s) + \lambda \frac{\gamma_1}{\lambda_1 - \lambda} \varphi_1(s) = f(s) + \lambda \frac{\gamma_1}{3 - \lambda} \sqrt{3}\, s.$$

Setzen wir diesen Wert in die Ausgangsgleichung ein, so finden wir sie, wenn wir $\int_0^1 t f(t) dt = \frac{\gamma_1}{\sqrt{3}}$ beachten, tatsächlich bestätigt. Wenden wir ferner die allgemeine Formel (5) an auf den Spezialfall $f(s) = \varphi_\varkappa(s)$, so ist wegen der Orthogonalität $\gamma_\nu = 0$ für $\nu \neq \varkappa$ und $\gamma_\varkappa = 1$; es folgt also

$$\eta(s) = \varphi_\varkappa(s) + \lambda \frac{1}{\lambda_\varkappa - \lambda} \varphi_\varkappa(s) = \frac{\lambda_\varkappa}{\lambda_\varkappa - \lambda} \varphi_\varkappa(s),$$

wie wir es oben schon direkt ausgerechnet haben. Ebenso möge der Leser für den Kern $K(s,t) = s + t$ die Schmidtsche Auflösungsformel direkt verifizieren und weiter für den Kern $K(s,t) = e^{s+t}$ und das Intervall $0 \ldots ln 2$ das System der Eigenwerte und Eigenfunktionen bestimmen und für diesen Fall (5) nachprüfen.

Der Satz 2 gilt also speziell auch dann, wenn es für $f(s)$ die Fourierentwicklung nach dem Systeme $\{\varphi_\nu(s)\}$ nicht gibt; dagegen sind wir einstweilen noch an die sehr hemmende Voraussetzung gebunden, daß für den Kern die Entwicklung (2) gilt. Mit anderen Worten, wir haben nur für diese gewisse Teilgruppe von Kernen unser Hauptproblem erledigt. Die ganze Schwierigkeit beruht nun darauf, uns von dieser Einschränkung frei zu machen, d. h. die Gültigkeit der Schmidtschen Auflösungsformel (5) auch ohne die Voraussetzung (2) zu beweisen. Um dieses Ziel zu erreichen, verfahren wir nach folgendem Gedankengang: Im nächsten Paragraphen werden wir sehen, wie wir uns aus dem gegebenen Kerne $K(s,t)$ andere, ebenfalls symmetrische Kerne verschaffen können. Deren Eigenwerte und

Eigenfunktionen werden in einfacher Weise mit denen des Ausgangskernes zusammenhängen. Es wird aber — und das ist das Wichtigste — für diese neuen Kerne die zu (2) analoge Entwicklung in die Bilinearreihe gelten. In § 4 werden wir zeigen, wie wir über den Umweg über diese neugebildeten Kerne zur Allgemeingültigkeit der Schmidtschen Auflösungsformel kommen. Weiter ist dann noch der Fall zu behandeln, daß der Parameterwert λ der Gleichung (1) gerade mit einem der Eigenwerte identisch ist.

Die Betrachtungen des folgenden Paragraphen sind aber darüber hinaus noch insofern von erhöhter Bedeutung, als wir hierin das wesentliche Hilfsmittel zu dem noch schuldigen Existenzbeweise von Satz 1 in § 1 erkennen werden.

§ 3. Die iterierten Kerne.

Gehen wir aus von dem Systeme $\{\varphi_\nu(s)\}$, das zu dem gegebenen Kerne $K(s, t)$ gehört, so ist es trivial, daß es unendlich viele andere Kerne gibt, die genau dieselben Eigenfunktionen haben. Denn wir brauchen ja nur eine solche monoton wachsende Zahlenfolge $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots$ auszuwählen, daß

$$K^*(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^*}$$

gleichmäßig konvergent ist (das ist, wie wir hier nicht näher ausführen wollen, stets möglich). Damit ist uns jedoch nicht gedient; denn die so gebildeten Kerne $K^*(s, t)$ werden in keinem brauchbaren Zusammenhange mit $K(s, t)$ stehen. Wir überlegen aber leicht, daß wir auch andere Kerne bilden können, die mit dem Ausgangskerne sehr nahe verwandt sind und dieselben Eigenfunktionen wie $K(s, t)$ besitzen. Setzen wir nämlich in der homogenen Gleichung

$$\varphi_\varkappa(s) = \lambda_\varkappa \int_a^b K(s, r)\,\varphi_\varkappa(r)\,dr$$

für $\varphi_\varkappa(r)$ seinen Wert

$$\varphi_\varkappa(r) = \lambda_\varkappa \int_a^b K(r, t)\,\varphi_\varkappa(t)\,dt$$

ein, so ergibt sich

$$\varphi_\varkappa(s) = \lambda_\varkappa^2 \int_a^b \left\{ \int_a^b K(s, r)\,K(r, t)\,dr \right\} \varphi_\varkappa(t)\,dt.$$

In der geschweiften Klammer steht aber wieder eine offenbar symmetrische Funktion von s und t, und die $\varphi_\varkappa(s)$ sind Eigenfunktionen von diesem neuen Kerne, und zwar gehören sie hier zu dem Eigenwerte $\lambda_\varkappa^2$. Bezeichnen wir diesen neuen Kern mit $K^{(2)}(s,t)$ und setzen wir wieder in dem Integranden für $\varphi_\varkappa$ seinen Integralwert ein, so erhalten wir, wenn wir in dieser Weise fortfahren, sukzessive das folgende System von Kernen:

$$K^{(1)}(s,t) = K(s,t),$$

$$K^{(2)}(s,t) = \int_a^b K^{(1)}(s,r)K^{(1)}(r,t)\,dr,$$

$$K^{(3)}(s,t) = \int_a^b K^{(2)}(s,r)K^{(1)}(r,t)\,dr,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(1) $$K^{(n)}(s,t) = \int_a^b K^{(n-1)}(s,r)K^{(1)}(r,t)\,dr.$$

Def.: Die nach dem Rekursionsverfahren (1) aus dem gegebenen Kerne $K(s,t) = K^{(1)}(s,t)$ gebildeten neuen Kerne $K^{(n)}(s,t)$ heißen die „Iterationen" von $K(s,t)$ oder die zu $K(s,t)$ gehörigen „iterierten Kerne".

Über diese iterierten Kerne können wir aus (1) sogleich einige einfache Eigenschaften ablesen. Zunächst können wir, indem wir in $K^{(n)}(s,t)$ rückwärts für $K^{(n-1)}, K^{(n-2)}, \ldots$ ihre Werte eingesetzt denken, $K^{(n)}(s,t)$ als ein $(n-1)$faches Integral schreiben, in welchem nur der ursprüngliche Kern, und zwar $n$mal, auftritt; z. B. für $n = 3$:

$$K^{(3)}(s,t) = \int_a^b\int_a^b K(s,\varrho)K(\varrho,\sigma)K(\sigma,t)\,d\varrho\,d\sigma,$$

und allgemein, wenn wir die verschiedenen Integrationsvariabeln mit $r_1, r_2, \ldots$ bezeichnen,

(1′) $$K^{(n)}(s,t)$$
$$= \int_a^b \cdots \int_a^b K(s,r_1)K(r_1,r_2)\cdots K(r_{n-2},r_{n-1})K(r_{n-1},t)\,dr_1 dr_2\cdots dr_{n-1}.$$

Aus (1′) lesen wir wegen der Symmetrie von $K(s,t)$ auch die von

$K^{(n)}(s, t)$ ab; d. h. es gilt

(2) $$K^{(n)}(s, t) = K^{(n)}(t, s).$$

Ferner folgt aus (1') die wichtige Beziehung

(3) $$K^{(m+n)}(s, t) = \int_a^b K^{(m)}(s, r) K^{(n)}(r, t)\, dr.$$

Diese iterierten Kerne (1) haben nun, ebenso wie der Ausgangskern, wieder ihr System von Eigenwerten und Eigenfunktionen. Die obige Überlegung, die uns zur Aufstellung der Iterationen führte, lehrt uns sogleich, daß die $\varphi_\nu(s)$ sämtlich wieder Eigenfunktionen von den $K^{(n)}(s, t)$ sind; denn wir hatten ja schon gefunden, wenn wir die obige Bezeichnung verwenden, daß

$$\varphi_\nu(s) = \lambda_\nu^2 \int_a^b K^{(2)}(s, t)\, \varphi_\nu(t)\, dt$$

ist. Wir schreiben hier r statt t und setzen für $\varphi_\nu(r)$ seinen Integralwert ein; so erhalten wir mit Rücksicht auf (1)

$$\varphi_\nu(s) = \lambda_\nu^3 \int_a^b K^{(3)}(s, t)\, \varphi_\nu(t)\, dt$$

und, wenn wir in dieser Weise fortfahren, allgemein

(4) $$\varphi_\nu(s) = \lambda_\nu^n \int_a^b K^{(n)}(s, t)\, \varphi_\nu(t)\, dt.$$

Wir stellen also fest: Jede Eigenfunktion $\varphi_\nu(s)$ von $K(s, t)$ ist auch Eigenfunktion von $K^{(n)}(s, t)$ und gehört bei diesem Kerne zum Eigenwerte λ_ν^n.

Wir müssen aber noch die umgekehrte Frage behandeln: Gibt uns das System $\{\varphi_\nu(s)\}$ auch wirklich alle Eigenfunktionen von $K^{(n)}(s, t)$? Oder können noch andere Eigenwerte und Eigenfunktionen existieren?

Wir werden zeigen, daß dies nicht der Fall ist, mit anderen Worten, daß $\{\varphi_\nu(s)\}$ das vollständige zu $K^{(n)}(s, t)$ gehörige Orthogonalsystem ist (mit den Eigenwerten λ_ν^n). Um das zu beweisen, nehmen wir an, es habe $K^{(n)}(s, t)$ auch eine Eigenfunktion $\psi(s)$, zum Eigenwerte μ gehörig, die durch $\{\varphi_\nu(s)\}$ noch nicht gegeben ist. Da wir stets (vgl. S. 50) das System der zu einem Kerne gehörigen Eigenfunktionen als ein Orthogonalsystem voraussetzen können, so

müßte $\psi(s)$ zu allen anderen Eigenfunktionen von $K^{(n)}(s,t)$, also speziell zu allen $\varphi_\nu(s)$ orthogonal sein. Es würde daher aus der obigen Annahme

$$\psi(s) = \mu \int_a^b K^{(n)}(s,t)\psi(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi(s)\varphi_\nu(s)\,ds = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

folgen. Wir wollen hieraus nun einen Widerspruch herleiten, indem wir aus $\psi(s)$ eine Eigenfunktion von $K(s,t)$ aufbauen, die zu allen $\varphi_\nu(s)$ orthogonal ist. Das widerspricht der Voraussetzung, daß $\{\varphi_\nu(s)\}$ vollständig ist. Dazu bilden wir das folgende System von Funktionen

$$\psi_1(s) = \psi(s),$$

$$\psi_2(s) = \int_a^b K(s,t)\,\psi_1(t)\,dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_\varrho(s) = \int_a^b K(s,t)\,\psi_{\varrho-1}(t)\,dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_n(s) = \int_a^b K(s,t)\,\psi_{n-1}(t)\,dt.$$

In dieser Weise könnten wir beliebig fortfahren. Wir sehen aber leicht, daß nun keine neuen Funktionen mehr hinzukommen. Denn bilden wir

$$\psi_{n+1}(s) = \int_a^b K(s,t)\,\psi_n(t)\,dt$$

und setzen wir hierin mit Änderung der Bezeichnung der Integrationsvariabeln rückwärts für $\psi_n(t)$ das letzte Integral mit ψ_{n-1}, darin für ψ_{n-1} das vorletzte Integral mit ψ_{n-2} ein usw., so erkennen wir, daß wir $\psi_{n+1}(s)$ auch so schreiben können:

$$\psi_{n+1}(s) = \int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(s,r_1)\,K(r_1,r_2)\cdots K(r_{n-1},t)\,\psi_1(t)\,dr_1\,dr_2\cdots dr_{n-1}\,dt.$$

Das $(n-1)$fache Integral aber nach $r_1, \ldots r_{n-1}$ ist gerade $K^{(n)}(s,t)$. Wir erhalten also

$$\psi_{n+1}(s) = \int_a^b K^{(n)}(s,t)\,\psi_1(t)\,dt = \frac{\psi_1(s)}{\mu}.$$

Wir bemerken sogleich, daß sämtliche $\psi_\varkappa(s)$ orthogonal zu allen $\varphi_\nu(s)$ sind; denn bei $\psi_1(s)$ stimmt es gemäß unserer Annahme. Dann aber folgt

$$\int_a^b \psi_2(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = \int_a^b\int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(s)\,\psi_1(t)\,ds\,dt = \int_a^b \frac{\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}\,\psi_1(t)\,dt = 0,$$

ebenso für $\psi_3(s), \ldots$. Die Funktionen $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots$ sind sämtlich nicht identisch Null; denn wäre etwa $\psi_\varkappa(s) \equiv 0$, so würde sukzessive $\psi_{\varkappa+1}(s) \equiv 0$, $\psi_{\varkappa+2}(s) \equiv 0, \ldots \psi_{n+1}(s) \equiv 0$ und also auch $\psi_1(s) \equiv 0$ folgen, was nach unserer Annahme nicht der Fall ist. Andererseits sind nicht sämtliche Funktionen $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots$ linear unabhängig; es können dies, wegen $\psi_{n+1}(s) = \frac{\psi_1(s)}{\mu}$ usw., höchstens die n ersten sein. Es sei ϱ die Zahl, für welche $\psi_1, \ldots \psi_\varrho$ linear unabhängig, aber $\psi_1, \ldots \psi_\varrho, \psi_{\varrho+1}$ linear abhängig sind. Dann können wir $\psi_{\varrho+1}(s)$ in der Form

$$\psi_{\varrho+1}(s) = \alpha_1\psi_1(s) + \alpha_2\psi_2(s) + \cdots + \alpha_\varrho\psi_\varrho(s)$$

darstellen.

Jetzt machen wir, um aus $\psi_1(s), \ldots \psi_\varrho(s)$ eine Eigenfunktion $\Psi(s)$ von $K(s,t)$ zu konstruieren, den Ansatz

$$\Psi(s) = \sum_{\nu=1}^{\varrho} p_\nu \psi_\nu(s)$$

und wollen die p_ν und λ so wählen, daß

$$\Psi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\,\Psi(t)\,dt$$

erfüllt ist. Setzen wir für $\Psi(s)$ die Summe ein und berücksichtigen wir

$$\int_a^b K(s,t)\,\psi_\nu(t)\,dt = \psi_{\nu+1}(s),$$

so erhalten wir

$$\sum_{\nu=1}^{\varrho} p_\nu \psi_\nu(s) = \lambda\{p_1\psi_2(s) + \cdots + p_{\varrho-1}\psi_\varrho(s)\} + \lambda p_\varrho \psi_{\varrho+1}(s).$$

Drücken wir, wie oben geschehen, $\psi_{\varrho+1}(s)$ durch $\psi_1(s), \ldots \psi_\varrho(s)$ aus, so folgt

$$\sum_{\nu=1}^{\varrho} p_\nu \psi_\nu(s) = \lambda p_\varrho \alpha_1 \psi_1(s) + \sum_{\nu=2}^{\varrho} \lambda(p_{\nu-1} + p_\varrho \alpha_\nu)\,\psi_\nu(s).$$

Da hier nur die $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_\varrho$ auftreten und diese linear unabhängig sind, so ist dies nur möglich, wenn rechts und links die Koeffizienten der einzelnen $\psi_\nu(s)$ gleich sind. Es müssen also die ϱ homogenen Gleichungen gelten

$$\begin{aligned} p_1 &= \lambda p_\varrho \alpha_1, \\ p_2 &= \lambda p_1 + \lambda p_\varrho \alpha_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ p_\varrho &= \lambda p_{\varrho-1} + \lambda p_\varrho \alpha_\varrho. \end{aligned}$$

Das ist, wenn nicht alle $p_\nu = 0$ sein sollen, dann und nur dann möglich, wenn die Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda\alpha_1 \\ -\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda\alpha_2 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ldots & 0 & -\lambda\alpha_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & (1-\lambda\alpha_\varrho) \end{vmatrix} = 0$$

ist. Das ist eine Bestimmungsgleichung für λ, woraus wir uns λ ermittelt denken. Die $p_1, \ldots p_\varrho$ seien eine (dann sicher existierende) nichttriviale Lösung des obigen homogenen Gleichungssystemes. Dann genügt $\Psi(s) = \sum_{\nu=1}^{\varrho} p_\nu \psi_\nu(s)$ der homogenen Gleichung

$$\Psi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\,\Psi(t)\,dt,$$

ist also eine Eigenfunktion von $K(s,t)$. Da die $\psi_1(s), \ldots \psi_\varrho(s)$ linear unabhängig und die p_ϱ nicht alle Null sind, so kann nicht $\Psi(s) \equiv 0$ sein. Es ist also $\Psi(s)$ notwendigerweise durch $\{\varphi_\nu(s)\}$ mit gegeben, d. h. entweder ein $\varphi_\varkappa(s)$ selbst oder eine lineare Kombination gewisser derselben, etwa

$$\Psi(s) = c_1 \varphi^{(1)}(s) + \cdots + c_m \varphi^{(m)}(s),$$

wo die $c_1, \ldots c_m$ sämtlich $\neq 0$ sind. Als lineare Kombination der $\psi_1, \ldots \psi_\varrho$ aber müßte $\Psi(s)$ orthogonal zu allen $\varphi_\nu(s)$, also auch speziell zu $\varphi^{(1)}(s)$ sein, während

$$\int_a^b \Psi(s)\,\varphi^{(1)}(s)\,ds = c_1 \neq 0$$

ergibt. Also ist die oben gemachte Annahme falsch, und wir haben den

Satz 1: *Das vollständige System der Eigenfunktionen und Eigenwerte der nach der Rekursionsformel* (1) *aus* $K(s, t)$ *gebildeten iterierten Kerne* $K^{(n)}(s, t)$ *ist gegeben durch*

$$(5) \qquad \begin{cases} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \ldots & \varphi_\nu(s) \ldots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \ldots & \lambda_\nu^n \ldots \end{cases}$$

Nach Satz 10 in § 1 können wir also sagen: Wenn die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^m}$$

gleichmäßig in s und t konvergiert, so stellt sie den Kern $K^{(m)}(s, t)$ dar. Wir beweisen, daß dies für hinreichend große Exponenten m der Fall ist, und zwar sicher für $m \geqq 3$ stimmt; es wird sich sogar ohne weiteres ergeben, daß diese Reihen außerdem absolut konvergent sind. Wir haben ja nur zu zeigen, daß wir bei beliebig vorgegebener Fehlergrenze $\varepsilon > 0$ ein N angeben können, so daß für alle $n > N$ stets der Reihenrest

$$R_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} \left| \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^m} \right| < \varepsilon$$

ist. Da $m \geqq 3$ ist, haben wir

$$R_n \leqq \frac{1}{|\lambda_n|^{m-2}} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{|\varphi_\nu(s)|\,|\varphi_\nu(t)|}{\lambda_\nu^2},$$

und wegen $(\varphi_\nu(s) - \varphi_\nu(t))^2 \geqq 0$ haben wir

$$|\varphi_\nu(s)|\,|\varphi_\nu(t)| \leqq \frac{1}{2}\varphi_\nu^2(s) + \frac{1}{2}\varphi_\nu^2(t)$$

und also $$R_n \leqq \frac{1}{2}\,\frac{1}{|\lambda_n|^{m-2}} \left\{ \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu^2} + \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^2(t)}{\lambda_\nu^2} \right\}.$$

Nach (8), § 1, aber wissen wir, daß $\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}$ die Fourierkoeffizienten von $g(r) = K(r, s)$ sind. Nach der Besselschen Ungleichung ist

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu^2} \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu^2} \leqq \int_a^b K^2(r, s)\,dr < C.$$

(vgl. auch S. 61). Damit haben wir

$$R_n \leqq \frac{1}{2} \frac{1}{|\lambda_n|^{m-2}} 2\,C = \frac{C}{|\lambda_n|^{m-2}},$$

gleichzeitig für alle s und t; und weil $m-2 \geqq 1$ ist, können wir N sicher so wählen, daß für $n > N$ stets $R_n < \varepsilon$ ist. Damit haben wir den

Satz 2: *Für die iterierten Kerne* $K^{(n)}(s,t)$ *gilt für* $n = 3, 4, \ldots$ *die Darstellung*

$$K^{(n)}(s,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^{\,n}}, \tag{6}$$

wo die Reihe in s und t absolut und gleichmäßig konvergent ist.

Vorweg sei schon hier bemerkt, daß (6) auch für $n = 2$ gilt; wir kommen später in anderem Zusammenhange darauf zurück. Hier genügt uns dieser Satz vollständig, um unser Hauptproblem zu Ende zu führen.

§ 4. Allgemeiner Beweis der Schmidtschen Auflösungsformel.

Es handelt sich also darum, zu zeigen, daß die Gleichung

$$f(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt \tag{1}$$

stets durch

$$\eta(s) = f(s) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(s) \tag{2}$$

befriedigt wird. Daß (2) immer einen Sinn hat, haben wir schon durch den Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (als Folge des Schmidtschen Hilfssatzes) eingesehen. Wir setzen, wie oben (S. 62),

$$F(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt,$$

unter $\eta(s)$ die Funktion (2) verstanden, und müssen also

$$F(s) - f(s) = \lambda \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(s) - \int_a^b K(s,t) \left[f(t) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(t) \right] dt \right\}$$

als identisch Null nachweisen. Beachten wir, daß wegen der gleichmäßigen Konvergenz

$$\int_a^b K(s,t)\,\lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu-\lambda}\,\varphi_\nu(t)\,dt = \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{(\lambda_\nu-\lambda)\lambda_\nu}\,\varphi_\nu(s)$$

ist, so ist also die geschweifte Klammer

$$h(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu}\,\varphi_\nu(s) - \int_a^b K(s,t)\,f(t)\,dt. \tag{3}$$

Die hier auftretende unendliche Reihe ist, ebenso wie die in (2), gleichmäßig konvergent. Aber wir können eben hier in $h(s)$ weder für $f(t)$ noch für $K(s,t)$ die Reihenentwicklung einsetzen. Das war ja die ganze Schwierigkeit, die noch zu bewältigen blieb. Wir kommen aber nun mit Hilfe der iterierten Kerne zum Ziele. Zunächst stellen wir fest, daß $h(s)$ zu allen $\varphi_\nu(s)$ orthogonal ist. In der Tat ergibt sich sofort

$$\int_a^b h(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu} - \int_a^b \left(\int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(s)\,ds\right) f(t)\,dt$$

$$= \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu} - \int_a^b \frac{\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}\,f(t)\,dt = 0.$$

Somit folgt weiter, indem wir die obige Definitionsgleichung für $h(s)$ beiderseits mit $h(s)$ multiplizieren und integrieren,

$$\int_a^b h^2(s)\,ds = -\int_a^b\int_a^b K(s,t)\,h(s)\,f(t)\,ds\,dt.$$

Wir bilden nun

$$h_1(s) = \int_a^b K^{(2)}(s,r)\,h(r)\,dr$$

$$= \int_a^b \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu}\,\varphi_\nu(r)\,K^{(2)}(s,r)\,dr - \int_a^b\int_a^b K^{(2)}(s,r)\,K(r,t)\,f(t)\,dr\,dt$$

und finden, wenn wir die Integrationen nach r ausführen,

$$h_1(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu^{3}}\,\varphi_\nu(s) - \int_a^b K^{(3)}(s,t)\,f(t)\,dt \equiv 0;$$

denn für $K^{(3)}(s, t)$ können wir ja nach Satz 2 in § 3 die gleichmäßig konvergente Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^3}$$

einsetzen. Von hier aus können wir nun in einfachster Weise auf $h(s) \equiv 0$ schließen; es ist nämlich, wenn wir die Definitionsgleichung für $h_1(s)$ beachten,

$$0 = \int_a^b h_1(s) h(s)\, ds = \int_a^b\int_a^b\int_a^b K(s, r) K(r, t) h(t) h(s)\, dt\, ds\, dr.$$

Wegen $K(r, t) = K(t, r)$ aber können wir dies so schreiben:

$$0 = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(s, r) h(s)\, ds \right\}^2 dr.$$

Da der Integrand sicher $\geqq 0$ ist, folgt aus dem Verschwinden des Integrales, daß

$$\int_a^b K(s, r) h(s)\, ds \equiv 0,$$

ist. Damit aber haben wir, wenn wir in dem obigen Doppelintegrale für $\int_a^b h^2(s)\, ds$ zuerst nach s integrieren, festgestellt, daß

$$\int_a^b h^2(s)\, ds = 0$$

ist, also muß $h(s) \equiv 0$ sein, und wegen $F(s) - f(s) = \lambda h(s)$ ist unser Ziel erreicht. Es gilt somit der

Satz 1: *Ist in der Gleichung* (1) $\lambda \neq \lambda_\nu$, *so existiert stets genau eine Lösung, und sie ist gegeben durch* (2).

Bisher haben wir stets angenommen, daß in unserer Ausgangsgleichung der Parameter λ nicht mit einem der Eigenwerte identisch sei. Hier wollen wir umgekehrt gerade voraussetzen, daß dies der Fall ist, also von der Gleichung

$$(1') \qquad f(s) = \eta(s) - \lambda_\varkappa \int_a^b K(s, t)\, \eta(t)\, dt$$

ausgehen. Wir haben schon im Anfang von § 2 gesehen, daß (1')

nicht immer eine Lösung besitzt und haben S. 23 in dem Beispiele der Saitenschwingung die physikalische Bedeutung dieses Falles als den der Resonanz erkannt. Bevor wir die genauen Zusammenhänge direkt ableiten, wollen wir uns an Hand der Schmidtschen Auflösungsformel orientieren, welches Ergebnis wir wohl zu erwarten haben. Dazu nehmen wir der Einfachheit halber an, zu $\lambda_\varkappa$ gehöre nur die eine Eigenfunktion $\varphi_\varkappa(s)$ und schreiben in der Schmidtschen Formel η als Funktion von s und λ, also

$$\eta(s, \lambda) = f(s) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(s).$$

Lassen wir hierin $\lambda \to \lambda_\varkappa$ rücken, so wird wegen des Nenners $\lambda_\varkappa - \lambda$ der Ausdruck rechts über alle Grenzen wachsen, wie z. B. in dem eben erwähnten Resonanzfalle, d. h. es wird i. a. für $\lambda = \lambda_\varkappa$ keine Lösung geben. Etwas anderes ist es, wenn in der obigen Summe das Glied mit diesem Nenner $\lambda_\varkappa - \lambda$ überhaupt nicht auftritt; d. h. wenn $\gamma_\varkappa = 0$ sein sollte. Wir werden also vermuten, daß (1′) dann und nur dann eine Lösung besitzt, wenn $f(s)$ die spezielle Eigenschaft hat, daß $\gamma_\varkappa = \int_a^b f(s)\varphi_\varkappa(s)\,ds = 0$ ist. Diese Vermutung wollen wir nun direkt beweisen und als weitere Ergänzung im Falle $\gamma_\varkappa = 0$ die Eindeutigkeitsfrage klären. Dabei halten wir einstweilen noch an der vereinfachenden Annahme fest, daß zu $\lambda_\varkappa$ nur die eine Eigenfunktion $\varphi_\varkappa(s)$ gehört, daß also $\lambda_\varkappa$ ein einfacher Eigenwert ist.

Wir nehmen also einmal an, (1′) besitze eine Lösung. Dann folgt, wenn wir mit $\varphi_\varkappa(s)$ multiplizieren und über s integrieren,

$$\gamma_\varkappa = \int_a^b \eta(s)\varphi_\varkappa(s)\,ds - \lambda_\varkappa \int_a^b\int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,\varphi_\varkappa(s)\,dt\,ds.$$

Führen wir in dem Doppelintegrale zuerst die Integration nach s aus, so erkennen wir sogleich

$$(4) \qquad \gamma_\varkappa = 0.$$

(4) ist also eine notwendige Bedingung dafür, daß (1′) eine Lösung besitzt. Umgekehrt sei nun (4) erfüllt. Dann wollen wir direkt zeigen, daß

$$(2') \qquad \eta^*(s) = f(s) + \lambda_\varkappa \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \frac{\gamma_\nu \varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda_\varkappa}$$

eine Lösung von (1′) ist. $\sum'$ bedeutet dabei, daß der Summations-

index ν den Wert $\varkappa$ überspringt. Setzen wir (2′) in (1′) ein, so erhalten wir

$$f(s) = f(s) + \lambda_\varkappa \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \frac{\gamma_\nu \varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda_\varkappa} - \lambda_\varkappa \int_a^b K(s,t) \left\{ f(t) + \lambda_\varkappa \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \frac{\gamma_\nu \varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu - \lambda_\varkappa} \right\} dt.$$

Zum Beweise von Satz 1 haben wir schon festgestellt, daß $h(s) \equiv 0$ ist; mit Rücksicht auf (3) besagt dies

$$\int_a^b K(s,t) f(t)\, dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(s).$$

Wir dürfen hier $\sum'$ statt $\sum$ schreiben, weil ja nach Voraussetzung $\gamma_\varkappa = 0$ ist. Setzen wir diesen Ausdruck in die obige Gleichung ein, so erhalten wir, wenn wir noch das letzte Integral ausrechnen und $f(s)$ beiderseits fortlassen,

$$0 = \lambda_\varkappa \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \frac{\gamma_\nu \varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda_\varkappa} - \lambda_\varkappa \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(s) - \lambda_\varkappa^2 \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\lambda_\nu} \frac{\gamma_\nu \varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda_\varkappa},$$

und das ist richtig, wie man sofort sieht, wenn man die drei Koeffizienten von $\varphi_\nu(s)$ zusammenfaßt. Damit ist bewiesen, daß, wenn die Voraussetzung (4) erfüllt ist, $\eta^*(s)$ tatsächlich eine Lösung von (1′) ist.

Wir erkennen aber sogleich, daß es außer diesem $\eta^*(s)$ noch unendlich viele andere Lösungen gibt. Es ist nämlich

$$\eta(s) = \eta^*(s) + c\varphi_\varkappa(s) \tag{5}$$

für jedes beliebige c auch eine Lösung, wie man sofort durch Einsetzen bestätigt. Umgekehrt: Haben wir neben $\eta^*(s)$ noch irgendeine andere Lösung $\eta(s)$, so folgt aus

$$f(s) = \eta^*(s) - \lambda_\varkappa \int_a^b K(s,t) \eta^*(t)\, dt \quad \text{und} \quad f(s) = \eta(s) - \lambda_\varkappa \int_a^b K(s,t) \eta(t)\, dt$$

durch Subtraktion, daß $\eta(s) - \eta^*(s)$ der homogenen Gleichung genügt, also von der Form $c\varphi_\varkappa(s)$ sein muß. (5) liefert also tatsächlich alle Lösungen von (1′).

Genau ebenso erledigt sich der allgemeinere Fall, daß $\lambda_\varkappa$ ein ϱ facher Eigenwert ist. Es sei also

$$\lambda_\varkappa = \lambda_{\varkappa+1} = \cdots = \lambda_{\varkappa+\varrho-1}.$$

Dann folgt genau wie oben, daß notwendigerweise

$$(4') \qquad \gamma_\varkappa = \gamma_{\varkappa+1} = \cdots = \gamma_{\varkappa+\varrho-1} = 0$$

sein muß. Ist umgekehrt (4') erfüllt, so zeigt man ebenso wie vorhin, daß (2') eine Lösung von (1') ist; nur bedeutet jetzt Σ', daß dem Summationsindex die ϱ Zahlen $\varkappa, \varkappa + 1, \ldots \varkappa + \varrho - 1$ verboten sind. Die allgemeine Lösung erhalten wir als

$$(5') \quad \eta(s) = \eta^*(s) + c_0\varphi_\varkappa(s) + c_1\varphi_{\varkappa+1}(s) + \cdots + c_{\varrho-1}\varphi_{\varkappa+\varrho-1}(s),$$

wo die c unabhängig voneinander alle möglichen Zahlenwerte haben können. Und (5') liefert auch alle überhaupt möglichen Lösungen, da die Differenz irgend zweier Lösungen der homogenen Gleichung mit dem Parameter $\lambda_\varkappa$ genügen muß. Zusammengefaßt haben wir den

Satz 2: *Ist in der inhomogenen Gleichung* (1) *der Parameter* $\lambda = \lambda_\varkappa$, *d. h. gerade einer der Eigenwerte des Kernes, so existiert i. a. keine Lösung. Dann und nur dann, wenn* (4') *gilt, d. h. wenn die Fourierkoeffizienten der freien Funktion* $f(s)$ *in bezug auf die zu* $\lambda_\varkappa$ *gehörigen Eigenfunktionen sämtlich* 0 *sind, existiert eine Lösung, und dann nicht nur eine, sondern unendlich viele, die sämtlich durch* (5') *gegeben sind. Dabei können wir unter* $\eta^*(s)$ *eine beliebige von ihnen verstehen.*

Damit haben wir eine vollständige Übersicht über die Lösungsverhältnisse der inhomogenen Gleichung

$$f(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt$$

gewonnen. Im allgemeinen existiert eine einzige ganz bestimmte Lösung; nur in gewissen Ausnahmefällen, nämlich wenn der Parameter zufällig ein Eigenwert ist, trifft das nicht zu. Dann ist vielmehr das Normale, daß es überhaupt keine Lösung gibt. Damit das doch der Fall ist, muß noch eine ganz bestimmte Nebenbedingung hinzukommen, und dann gibt es unendlich viele Lösungen. Diese aber lassen sich sämtlich mittels einer beliebig herausgegriffenen *Grundlösung* übersichtlich darstellen. Das eben Gesagte trifft nun fast wörtlich zu auch für die Auflösung eines Systemes von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten, wie aus den einfachsten Anwendungen der elementaren Determinantentheorie bekannt ist. Wir weisen schon jetzt ausdrücklich hierauf hin; denn es ist diese Analogie keine zufällige; vielmehr bedeutet sie einen tiefen inneren Zusammenhang. Das wollen wir uns an dieser Stelle nur durch den Hinweis deutlich machen, daß wir ja in einem bestimmten Integrale nichts anderes haben als den Grenzwert einer endlichen Summe.

Ersetzen wir approximativ das Integral durch eine Summe von n Gliedern und beschränken wir demgemäß auch die Veränderliche s in geeigneter Weise nur auf n Werte, so tritt an die Stelle der obigen Gleichung als einer Identität in s ein System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten. Wir werden später noch sehen, wie Fredholm diesen Grundgedanken benutzt hat; er hat so als erster eine Theorie der Integralgleichungen geschaffen.

§ 5. Der Entwicklungssatz.

Die Überlegungen, die uns im vorigen Paragraphen zu dem Satz 1 führten, gestatten noch eine sehr wichtige Folgerung. Wir hatten festgestellt, daß die dort unter (8) definierte Funktion $h(s)$ identisch verschwindet, und das besagt

$$\int_a^b K(s,t) f(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(s). \tag{1}$$

Wir haben gesehen, daß (1) stets gilt, d. h. ohne daß wir die Reihenentwicklung von $K(s,t)$ vorauszusetzen brauchten, und zwar für jedes beliebige (quadratisch integrabele) $f(s)$. Setzen wir andererseits

$$g(s) = \int_a^b K(s,t) f(t)\,dt, \tag{2}$$

so sind die Fourierkoeffizienten von $g(s)$ in bezug auf das System $\{\varphi_\nu(s)\}$ gegeben durch

$$c_\nu = \int_a^b g(s)\varphi_\nu(s)\,ds = \int_a^b\int_a^b K(s,t)\varphi_\nu(s) f(t)\,ds\,dt$$

$$= \int_a^b \frac{\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} f(t)\,dt = \frac{\gamma_\nu}{\lambda_\nu}.$$

Somit haben wir den

Satz 1: *Jede „quellenmäßig", d. h. in der Form* (2) *darstellbare Funktion* $g(s)$ *gestattet die gleichmäßig konvergente Fourierentwicklung*

$$g(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(s); \quad c_\nu = \int_a^b g(s)\varphi_\nu(s)\,ds \tag{3}$$

(E. Schmidtscher Entwicklungssatz).

Hieraus können wir einen interessanten und für viele Fälle nützlichen Äquivalenzsatz folgern. Nehmen wir an, es sei $q(s)$ eine solche Funktion, daß

$$\int_a^b K(s,t)\,q(t)\,dt \equiv 0, \tag{4}$$

ist, so ist sofort ersichtlich, daß für alle ν

$$\int_a^b q(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = 0 \tag{4'}$$

gilt; denn wir brauchen ja in (4′) für $\varphi_\nu(s)$ nur seinen Integralwert einzusetzen, um dies einzusehen. Nehmen wir umgekehrt an, wir wüßten von der Funktion $q(s)$, daß (4′) für alle ν gilt, so können wir nicht ohne weiteres daraus auf (4) schließen (wohl, wenn für $K(s,t)$ die bilineare Entwicklung gilt). Der obige Satz 1 aber lehrt, daß stets aus (4′) auch umgekehrt (4) folgt; denn setzen wir

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)\,q(t)\,dt,$$

so besteht ja die Entwicklung $g(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(s)$; andererseits aber ist hier

$$c_\nu = \int_a^b g(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = \int_a^b\!\!\int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(s)\,q(t)\,ds\,dt$$

$$= \int_a^b \frac{\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}\,q(t)\,dt = 0.$$

Es folgt also $g(s) = \int_a^b K(s,t)\,q(t)\,dt \equiv 0$, und es gilt somit

Satz 2: *Ist das mit einer Funktion $q(s)$ gebildete Kernintegral identisch Null, so ist $q(s)$ zu allen Eigenfunktionen des Kernes orthogonal und umgekehrt; d. h. die beiden Gleichungen* (4) *und* (4′) *sind vollständig gleichwertig.*

Eine weitere interessante Anwendung des Satzes 1 erhalten wir, wenn wir $g(s) = K^{(2)}(s,r)$ setzen (r beliebig, aber festgehalten). Diese Funktion erfüllt die Bedingung der quellenmäßigen Darstellung wegen

$$K^{(2)}(s,r) = \int_a^b K(s,t)\,K(t,r)\,dt;$$

also gilt, zunächst bei festem r, die Fourierentwicklung. Da aber hier

$$c_\nu = \int_a^b K^{(2)}(s, r)\,\varphi_\nu(s)\,ds = \frac{\varphi_\nu(r)}{\lambda_\nu^2}$$

ist, so haben wir, wenn wir hinterher wieder t statt r schreiben, in Ergänzung zu Satz 2 in § 3 den

Satz 3: *Es gilt schon für $n = 2$ die Bilinearentwicklung*

$$K^{(2)}(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}. \tag{5}$$

$K^{(2)}(s, t)$ hat die besondere Eigenschaft, nur positive Eigenwerte zu besitzen, und es liegt die Vermutung nahe, daß jeder Kern mit nur positiven (oder nur negativen) Eigenwerten sich in die Bilinearreihe entwickeln läßt. Bewiesen haben wir das bisher nur für solche Kerne dieser Art, die als die erste Iteration eines anderen Kernes aufgefaßt werden können, und bewiesen ist hier nur die gleichmäßige Konvergenz der Reihe in s bei festgehaltenem t (und umgekehrt). Wir werden aber später bei stetigen Kernen die Richtigkeit der eben ausgesprochenen Vermutung und die gleichmäßige Konvergenz gleichzeitig in s und t beweisen (*Mercerscher Satz*).

Um die Schmidtsche Theorie zum Abschlusse zu bringen, haben wir noch die Aufgabe zu erfüllen, den Fundamentalsatz der Existenz mindestens eines Eigenwertes für einen beliebigen symmetrischen Kern zu beweisen. Denn von diesem Satze haben wir ja mehrfach Gebrauch gemacht; ohne ihn würde alles in den vorangehenden Paragraphen Gesagte in der Luft schweben.

§ 6. Beweis der Existenz eines Eigenwertes.

Diesen Beweis haben wir mit gutem Grunde hier an das Ende geschoben. Oben hätte er den Gedankengang unserer Untersuchungen unliebsam unterbrochen, und andererseits benötigen wir zu seiner Durchführung vor allem der Begriffsbildung der iterierten Kerne, die wir uns mittlerweile ja in anderem Zusammenhange schon verschafft haben.

Um die Idee des *Schmidtschen Beweises* für die Existenz eines Eigenwertes deutlich zu machen, wollen wir für den Augenblick noch einmal diesen Satz als schon bewiesen annehmen. Dann lehrte uns

Satz 2 in § 3, daß für die iterierten Kerne die Entwicklung

$$K^{(n)}(s,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^n}$$

gilt. Wählen wir hier n als sehr große Zahl, so wird in dieser Summe das erste Glied vor den anderen überwiegen (wenigstens wenn wir der Bequemlichkeit halber noch voraussetzen, daß λ_1 nur ein einfacher Eigenwert ist). In

$$\lambda_1^n K^{(n)}(s,t) = \varphi_1(s)\varphi_1(t) + r(s,t)$$

wird also die Restfunktion $r(s,t)$ um so kleiner, je größer n ist. Speziell wird, wegen der Normiertheit von $\varphi_1(s)$, bei $n \to \infty$

$$\lambda_1^n \int_a^b K^{(n)}(s,s)\,ds \to 1$$

streben. Mit dieser Beziehung werden wir jedoch noch nicht viel anfangen können, da λ_1^n, wenn nicht zufällig $\lambda_1 = 1$ ist, gegen 0 bzw. ∞ strebt. Wohl aber werden wir vermuten, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_a^b K^{(n)}(s,s)\,ds}{\int_a^b K^{(n+1)}(s,s)\,ds} = \lambda_1$$

ist. Daß dies stimmt, wollen wir nun beweisen.

Wir bezeichnen

(1) $$\int_a^b K^{(n)}(s,s)\,ds = U_n$$

als die *Schwarzschen Konstanten.* Von diesen wollen wir zunächst einige einfache Eigenschaften ableiten. Wegen der Beziehung (3), § 3 folgt sofort für ein beliebiges ganzzahliges positives q

(2) $$U_{n+q} = \int_a^b\int_a^b K^{(n)}(s,\alpha)\,K^{(q)}(\alpha,s)\,d\alpha\,ds$$

und speziell, mit Beachtung der Symmetrie der iterierten Kerne,

(2') $$U_{2n} = \int_a^b\int_a^b [K^{(n)}(s,\alpha)]^2\,d\alpha\,ds.$$

Wenden wir nun auf (2) die in Kap. I, § 8, bewiesene Schwarzsche Ungleichung an, so erhalten wir

$$U_{h+q}^2 \leqq \int_a^b\int_a^b [K^{(h)}(s,\alpha)]^2 ds\, d\alpha \cdot \int_a^b\int_a^b [K^{(q)}(\alpha,s)]^2 d\alpha\, ds,$$

also mit Rücksicht auf (2′)

$$U_{h+q}^2 \leqq U_{2h} U_{2q}.$$

Dies gilt für jedes beliebige h und q. Wir wenden es an in dem Spezialfalle $h = n - 1$, $q = n + 1$ und erhalten

(3) $$U_{2n}^2 \leqq U_{2n-2} U_{2n+2}.$$

Weiter sehen wir, daß stets

(4) $$U_{2n} > 0$$

ist. Aus (2′) folgt nämlich, daß stets $U_{2n} \geqq 0$ ist, und $= 0$ kann es nur sein, wenn $K^{(n)}(s,t)$ identisch verschwindet. Wäre das aber der Fall, so müßten wegen (1), § 3, auchalle $K^{(m)}(s,t)$ mit $m \geqq n$ identisch verschwinden. Das aber steht damit in Widerspruch, daß sicher $K^{(2)}(s,s)$, $K^{(4)}(s,s)$, $\ldots K^{(2^\nu)}(s,s)$, $\ldots$ nicht identisch verschwinden; denn aus (vgl. (3), § 3)

$$K^{(2^\nu)}(s,s) = \int_a^b [K^{(2^{\nu-1})}(s,r)]^2 dr \equiv 0$$

würde $K^{(2\nu-1)}(s,t) \equiv 0$, also $K^{(2\nu-1)}(s,s) \equiv 0$ folgen; und durch Wiederholung desselben Schlusses würde sich endlich $K(s,t) \equiv 0$ ergeben, während $K(s,t)$ als nicht identisch verschwindend vorausgesetzt ist.

Wegen (4) dürfen wir also durch U_{2n} stets dividieren und erhalten so aus (3) die Kette der Ungleichungen

(5) $$0 < \frac{U_{2n}}{U_{2n-2}} \leqq \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} \leqq \frac{U_{2n+4}}{U_{2n+2}} \leqq \cdots$$

Diese Quotienten sind nun beinahe dieselben, wie sie in der oben ausgesprochenen Vermutung stehen. In jener Grenzrelation können wir ja aber auch ebenso gut $K^{(n+2)}(s,s)$ im Nennerintegral schreiben, wobei natürlich rechts dann λ_1^2 stehen muß. Aus dieser Bemerkung erkennen wir, daß uns die Zahlenfolge (5) zum Ziele verhelfen wird, wenn wir sie als konvergent nachweisen können. (5) selbst lehrt uns schon, daß wir es mit einer mit wachsendem n monoton zunehmenden Zahlenfolge zu tun haben. Die Konvergenz ist also bewiesen,

wenn wir noch zeigen, daß alle Quotienten unterhalb einer festen Zahl bleiben. Das aber folgt so: Wenden wir die Schwarzsche Ungleichung auf den Integralausdruck für $K^{(n+q)}(s,t)$ an, so erhalten wir

$$[K^{(n+q)}(s,t)]^2 \leqq \int_a^b [K^{(n)}(s,r)]^2 dr \cdot \int_a^b [K^{(q)}(r,t)]^2 dr.$$

Hier integrieren wir auf beiden Seiten nach beiden Variabeln von a bis b und finden so, mit Rücksicht auf (2′),

(6) $$U_{2(n+q)} \leqq U_{2n}\, U_{2q}$$

und speziell $U_{2n+2} \leqq U_{2n}\, U_2$ oder $\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} \leqq U_2$,

d. h. es bleiben alle Elemente der Zahlenfolge (5) $\leqq U_2$. Damit ist die Konvergenz von (5) bewiesen, und wir haben

(7) $$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{2n}}{U_{2n-2}} = \frac{1}{Q}.$$

Unsere obige Vermutung können wir jetzt kurz als

$$\lambda_1^2 = Q$$

schreiben. Für das folgende ist noch die Feststellung nützlich, daß

(8) $$\lim_{n\to\infty} U_{2n}\, Q^n = L$$

existiert. Das erhellt sogleich daraus, daß stets

$$U_{2n} Q \leqq U_{2n-2}$$

ist, weil ja (5) eine monoton wachsende Zahlenfolge ist. Also ist

$$U_{2(n-1)} Q^{n-1} \geqq U_{2n} Q^n \geqq U_{2(n+1)} Q^{n+1} \geqq \cdots$$

eine monoton abnehmende Folge von lauter positiven Zahlen, womit (8) bewiesen ist. Übrigens ist noch

(8′) $$L \geqq 1;$$

denn aus (6) folgt

$$U_{2q} \geqq \frac{U_{2n+2q}}{U_{2n+2q-2}} \cdot \frac{U_{2n+2q-2}}{U_{2n+2q-4}} \cdot \ldots \cdot \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} \geqq \left(\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}\right)^q,$$

wobei wir wieder (5) benutzt haben. Dies gilt für alle n; mit wachsendem n aber strebt die rechte Seite gegen $\left(\frac{1}{Q}\right)^q$. Wir haben also

$$U_{2q} Q^q \geqq 1,$$

und damit ist auch (8′) bewiesen.

Auf Grund der orientierenden Überlegungen zu Anfang dieses Paragraphen werden wir nun versuchen,

$$\lim_{n \to \infty} K^{(2n)}(s, t) Q^n = l(s, t) \tag{9}$$

nachzuweisen, wobei sich dann hinterher dieses $l(s, t)$ als ein Aggregat der zum ersten Eigenwerte gehörenden Eigenfunktionen herausstellen wird. Zunächst aber wollen wir uns nur davon überzeugen, daß der Grenzwert (9) existiert, und zwar gleichmäßig in s und t. Das zeigen wir durch den Nachweis, daß sich für hinreichend großes n und beliebige positive q alle $K^{(2n+2q)}(s, t) Q^{n+q}$ von $K^{(2n)}(s, t) Q^n$ um beliebig wenig unterscheiden, unabhängig von der Wahl der s und t. Dazu schreiben wir unter Benutzung von (3), § 3,

$$K^{(2n+2q)}(s, t) Q^{n+q} - K^{(2n)}(s, t) Q^n$$
$$= Q \int_a^b \int_a^b K(s, r) K(\varrho, t) [Q^{n+q-1} K^{(2n+2q-2)}(r, \varrho) - Q^{n-1} K^{(2n-2)}(r, \varrho)] dr\, d\varrho$$

und wenden hierauf die Schwarzsche Ungleichung an. So erhalten wir

$$[K^{(2n+2q)}(s, t) Q^{n+q} - K^{(2n)}(s, t) Q^n]^2$$
$$\leqq Q^2 \int_a^b \int_a^b [K(s, r) K(\varrho, t)]^2 dr\, d\varrho \cdot \int_a^b \int_a^b [Q^{n+q-1} K^{(2n+2q-2)}(r, \varrho) - Q^{n-1} K^{(2n-2)}(r, \varrho)]^2 dr\, d\varrho .$$

Führen wir in dem letzten Integrale die Quadratur aus und beachten die Formeln (2) und (2′), so folgt

$$[K^{(2n+2q)}(s, t) Q^{n+q} - K^{(2n)}(s, t) Q^n]^2$$
$$\leqq [Q^{2n+2q-2} U_{2(2n+2q-2)} - 2 Q^{2n+q-2} U_{2(2n+q-2)} + Q^{2n-2} U_{2(2n-2)}] Q^2 \int_a^b \int_a^b [K(s, r) K(\varrho, t)]^2 dr\, d\varrho .$$

Hierin ist der letzte Faktor gleichzeitig für alle s und t unterhalb einer festen Schranke gelegen. Der erste Faktor rechts aber, der s und t nicht mehr enthält, strebt bei $n \to \infty$ gegen Null, wie sich sofort aus (8) ergibt. Damit ist (9) bewiesen; $l(s, t)$ ist eine in s und t symmetrische Funktion. Nun ist es ein Leichtes, einzusehen, daß $\psi(s) = l(s, t_0)$ für jedes t_0 in $a \ldots b$ eine zum Eigenwert Q gehörige Eigenfunktion von $K^{(2)}(s, t)$ ist; denn es ist

$$Q^{n+1} K^{(2n+2)}(s, t_0) = Q \int_a^b K^{(2)}(s, r)\, Q^n K^{(2n)}(r, t_0)\, dr,$$

und hierin dürfen wir bei $n \to \infty$ wegen der eben bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz von (9) den Grenzübergang auch unter dem Integrale ausführen. So erhalten wir

$$l(s, t_0) = Q \int_a^b K^{(2)}(s, r)\, l(r, t_0)\, dr. \tag{10}$$

$l(s, t_0)$ ist — wenigstens bei passender Wahl von t_0 — wirklich Eigenfunktion in dem früher definierten Sinne; denn $l(s, t)$ kann nicht identisch Null sein. Dies folgt daraus, daß

$$\int_a^b l(s, s)\, ds = \lim_{n \to \infty} \int_a^b Q^n K^{(2n)}(s, s)\, ds = \lim_{n \to \infty} Q^n U_{2n} = L \geqq 1$$

ist. Damit sind wir am Schlusse; denn in § 8 haben wir ja schon gesehen, daß jede Eigenfunktion von $K^{(2)}(s, t)$ zum Eigenwerte Q auch eine solche von $K(s, t)$ selbst liefert, und zwar zum Eigenwerte $\sqrt{Q}$ gehörig. Es besitzt also tatsächlich jeder symmetrische Kern mindestens einen Eigenwert. Über die Existenz hinaus haben wir noch eine Darstellungsart kennengelernt:

$$\lambda_1 = \pm \lim \sqrt{\frac{U_{2n}}{U_{2n+2}}}.$$

Daß dies tatsächlich der kleinste Eigenwert ist, erkennen wir hinterher einfach daraus, daß mit dem Existenzbeweise alle unsere früheren Überlegungen, also auch die orientierenden zu Anfang dieses Paragraphen, als zu Recht bestehend nachgewiesen sind.

§ 7. Die C. Neumannsche Reihe und der Hilbertsche lösende Kern.

Die in den vorangehenden Paragraphen entwickelte Schmidtsche Theorie bildet nicht die einzige Möglichkeit, die Lösung η der Integralgleichung

$$(1) \qquad f(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \eta(t)\, dt$$

darzustellen. Das ist nicht verwunderlich, wenn wir daran denken, daß $\eta = \eta(s, \lambda)$ eine Funktion sowohl der Variabeln s als auch des Gleichungsparameters λ ist. Wenn wir, statt wie bisher s als die Hauptvariable zu betrachten, die Abhängigkeit von λ in den Vordergrund rücken, so wird sich eine andere Darstellung derselben Funktion η ergeben, und diese wollen wir nun untersuchen. Der Aufbau der Gleichung (1) legt es nahe, die Lösung als eine Potenzreihe von λ anzusetzen. Da nämlich η einmal allein, das andere Mal mit dem Faktor λ auftritt, so können wir das formale Bildungsgesetz der Reihe leicht ermitteln. Die Koeffizienten hängen natürlich noch von s ab, das in diesem Zusammenhange die Rolle eines Parameters spielt. Weiter dürfen wir vermuten, daß eine solche Potenzreihe für sehr kleine Werte von λ konvergiert. Lassen wir λ kleiner und kleiner werden, so nähert sich $\eta(s)$ mehr und mehr dem Werte $f(s)$, und wir werden hernach sehen, wie wir durch sukzessive Approximation, beginnend mit $f(s)$ als erster Näherung, zu derselben Potenzreihe kommen, wie wir sie hier jetzt als Erstes aufstellen wollen. Wir machen also den zunächst rein formalen Ansatz

$$(2) \qquad \eta(s, \lambda) = A_0(s) + A_1(s)\,\lambda + A_2(s)\,\lambda^2 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(s)\,\lambda^\nu$$

und nehmen an, die Reihe konvergiere für $|\lambda| \leqq \Lambda$. Dann gilt nach (1) für alle diese λ

$$(3) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(s)\,\lambda^\nu = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(t)\,\lambda^\nu\, dt.$$

Lassen wir hier $\lambda \to 0$ rücken, so erhalten wir

$$A_0(s) = f(s).$$

Diese beiden Glieder lassen wir in (3) fort, dividieren durch λ und

machen wiederum den Grenzübergang $\lambda \to 0$; so ergibt sich

$$A_1(s) = \int_a^b K(s, t) A_0(t)\, dt.$$

In dieser Weise fahren wir fort und kommen so zu den Rekursionsformeln

$$(4) \quad \begin{cases} A_0(s) = f(s) \\ A_1(s) = \int_a^b K(s, t) A_0(t)\, dt = \int_a^b K(s, t) f(t)\, dt \\ A_2(s) = \int_a^b K(s, t) A_1(t)\, dt = \int_a^b K^{(2)}(s, t) f(t)\, dt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_\nu(s) = \int_a^b K(s, t) A_{\nu-1}(t)\, dt = \int_a^b K^{(\nu)}(s, t) f(t)\, dt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Die rechts stehenden Ausdrücke haben wir erhalten, indem wir mit Änderung der Bezeichnung für die Integrationsvariable jedesmal den vorher erhaltenen Wert für $A_{\nu-1}(t)$ eingesetzt und (1), § 3 benutzt haben.

Zu den Formeln (2) und (4) gelangt man auch durch die sukzessive Approximation. Wir setzen dazu

$$(5) \quad y_1(s) = f(s); \quad y_n(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) y_{n-1}(t)\, dt \quad (n = 2, 3, \dots)$$

und bilden die Differenzen

$$(6) \quad \zeta_n(s) = y_{n+1}(s) - y_n(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \zeta_{n-1}(t)\, dt \quad \bigl(\zeta_0(s) = f(s)\bigr).$$

Dann ist

$$\zeta_0(s) = A_0(s), \quad \zeta_1(s) = A_1(s)\lambda, \quad \zeta_2(s) = A_2(s)\lambda^2, \dots \zeta_n(s) = A_n(s)\lambda^n, \dots,$$

wo die Bedeutung der $A_\nu(s)$ die in (2) und (4) gegebene ist. Wir können also (2) auch in der Form

$$(2') \quad \eta(s, \lambda) = \zeta_0(s) + \zeta_1(s) + \zeta_2(s) + \cdots = \sum_{\nu=1}^{\infty} \zeta_\nu(s)$$

schreiben. Wenn wir umgekehrt (2) oder (2′) bilden, so liefert uns diese Funktion in dem Konvergenzbereiche von λ eine Lösung von

(1), und diese ist, wie sich aus der obigen Betrachtung ergibt, die einzige. Wir müssen deshalb zusehen, ob und in welchem Bereiche (2) konvergiert. Für die λ-Werte, für welche das der Fall ist, haben wir damit einen Existenzbeweis der Lösung von (1) erbracht.

Wenn $f(s)$ und $K(s, t)$ für alle s und t beschränkt bleiben, so können wir durch eine ganz einfache Abschätzung sofort einen Bereich für λ angeben, in welchem (2) sicher konvergiert. Sind nämlich m und M obere Schranken für $|f(s)|$ und $|K(s,t)|$, also

$$|f(s)| \leqq m; \quad |K(s,t)| \leqq M \qquad (a \leqq s \leqq b;\ a \leqq t \leqq b),$$

so ist

$$|A_0(s)| \leqq m, \ |A_1(s)| \leqq m \cdot M(b-a), \ |A_2(s)| \leqq m M(b-a) \cdot M(b-a), \ldots$$

und allgemein

$$(7) \qquad |A_\nu(s)| \leqq m M^\nu (b-a)^\nu,$$

wie leicht durch den Schluß von n auf $n+1$ zu folgern ist. Es ist also $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} m M^\nu (b-a)^\nu \lambda^\nu$ eine Majorante von (2). Da diese als geometrische Reihe für $|M(b-a)\lambda| < 1$, d. h. für

$$(8) \qquad |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

konvergiert, so haben wir in (8) auch einen Konvergenzbereich für (2) gewonnen.

Durch einfache Anwendung der Schwarzschen Ungleichung können wir einen besseren Konvergenzbereich erzielen. Dazu gehen wir von (2′) aus und schätzen die einzelnen Summenglieder $\zeta_\nu(s)$ mittels der Schwarzschen Ungleichung ab. Mit Rücksicht auf (6) haben wir

$$\zeta_n^2(s) = \lambda^2 \left(\int_a^b K(s,t)\, \zeta_{n-1}(t)\, dt \right)^2 \leqq \lambda^2 \int_a^b K^2(s,t)\, dt \int_a^b \zeta_{n-1}^2(t)\, dt,$$

also, wenn wir beiderseits nach s integrieren,

$$\int_a^b \zeta_n^2(s)\, ds \leqq \lambda^2 \int_a^b\!\!\int_a^b K^2(s,t)\, ds\, dt \int_a^b \zeta_{n-1}^2(t)\, dt = \lambda^2 D \int_a^b \zeta_{n-1}^2(t)\, dt;$$

dabei ist unter D die schon S. 48 benutzte Konstante verstanden. Diese Abschätzung wenden wir mit $n-1$ auf den letzten Faktor rechts an und fahren so fort bis zu $\zeta_0(s) = f(s)$. Dann erhalten wir

$$\int_a^b \zeta_n^2(s)\, ds \leqq \lambda^{2n} D^n \int_a^b f^2(s)\, ds.$$

Schließlich ergibt sich hieraus mit nochmaliger Benutzung der Schwarzschen Ungleichung

$$|\zeta_{n+1}(s)| = |\lambda| \left| \int_a^b K(s,t)\,\zeta_n(t)\,dt \right| \leqq |\lambda| \sqrt{\int_a^b K^2(s,t)\,dt} \sqrt{\int_a^b \zeta_n^2(t)\,dt}$$
$$\leqq C \cdot |\lambda \sqrt{D}|^n,$$

wo C als obere Schranke von $|\lambda| \sqrt{\int_a^b K^2(s,t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_a^b f^2(s)\,ds}$ eine endliche Konstante ist. Es ist also für alle λ, für welche $|\lambda \sqrt{D}| = \varepsilon < 1$ ist, (2′) konvergent; denn für einen beliebigen Reihenabschnitt gilt hiernach

$$|\zeta_{n+1}(s) + \zeta_{n+2}(s) + \cdots + \zeta_{n+q}(s)| \leqq C(\varepsilon^n + \varepsilon^{n+1} + \cdots + \varepsilon^{n+q-1})$$
$$< C\,\frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon},$$

und das strebt bei $n \to \infty$ gegen Null, und zwar gleichmäßig in s, sobald $\varepsilon < 1$ ist. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1: *Die C. Neumannsche Reihe* (2) *konvergiert sicher für*

$$(9) \qquad |\lambda| < \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(s,t)\,ds\,dt}}$$

und stellt also mindestens in diesem Bereiche die Lösung von (1) *dar.*

(9) enthält (8) und ist i. a. eine wesentlich bessere Grenze als (8); denn es ist ja stets

$$\sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(s,t)\,ds\,dt} \leqq M \cdot (b-a),$$

und zwar ist die linke Seite erheblich kleiner als die rechte, wenn der Kern so beschaffen ist, daß der maximale Wert aus der übrigen Gesamtheit beträchtlich herausragt; das ist z. B. der Fall, wenn der Kern, als Fläche über der s, t-Ebene aufgetragen, eine ähnliche Gestalt zeigt wie etwa die Gebilde einer Tropfsteinhöhle.

Für den Beweis von Satz 1 haben wir nichts aus der Schmidtschen Theorie benutzt, auch nicht die Symmetrie des Kernes. Setzen wir diese jetzt wieder voraus, so können wir leicht die genaue Konvergenzgrenze für λ feststellen, wenn wir den Schmidtschen Ent-

wicklungssatz heranziehen. Dazu führen wir die Fehlerfunktionen

(10) $$F_n(s) = \eta(s) - y_n(s)$$

ein. Diese sind miteinander durch die Rekursionsformel

(11) $$F_{n+1}(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) F_n(t) dt$$

verbunden, wie sich sofort durch Subtraktion der beiden Gleichungen

$$y_{n+1}(s) = f(s) + \lambda \int_a K(s, t) y_n(t) dt,$$

$$\eta(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \eta(t) dt$$

ergibt. Dabei benutzen wir, daß die Lösung $\eta(s)$ existiert, setzen also bei dieser ganzen Betrachtung voraus, daß λ kein Eigenwert von $K(s, t)$ ist.

Wegen $y_1(s) = f(s)$ haben wir

$$F_1(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \eta(t) dt,$$

d. h. es ist $F_1(s)$ als Kernintegral darstellbar und also nach dem Schmidtschen Entwicklungssatze in die absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

(12) $$F_1(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(1)} \varphi_\nu(s) \qquad \left(c_\nu^{(1)} = \int_a^b F_1(s) \varphi_\nu(s) ds\right)$$

entwickelbar. Das Analoge gilt wegen (11) für die sämtlichen Fehlerfunktionen; wir haben also

$$F_{n+1}(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(n+1)} \varphi_\nu(s).$$

Die Fourierkoeffizienten $c_\nu^{(1)}, c_\nu^{(2)}, \ldots$ hängen aber in einfacher Weise zusammen; aus (11) entnehmen wir nämlich

$$c_\nu^{(n+1)} = \lambda \int_a^b \int_a^b K(s, t) F_n(t) \varphi_\nu(s) dt ds = \frac{\lambda}{\lambda_\nu} \int_a^b F_n(t) \varphi_\nu(t) dt = \frac{\lambda}{\lambda_\nu} c_\nu^{(n)}.$$

Das gilt für alle n. Benutzen wir dies für $n-1, n-2, \ldots$, so erhalten wir schließlich durch sukzessives Einsetzen $c_\nu^{(n+1)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)^n c_\nu^{(1)}$

und somit

$$(12') \qquad F_{n+1}(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)^n c_\nu^{(1)} \varphi_\nu(s).$$

Hieraus ergibt sich nun sofort, daß mit wachsendem n dann und nur dann $F_n(s) \to 0$ strebt, und zwar gleichmäßig in s, wenn $|\lambda| < |\lambda_1|$ ist; denn dann folgt aus (12')

$$|F_{n+1}(s)| \leqq \left|\frac{\lambda}{\lambda_1}\right|^n \cdot C,$$

wenn C ein Konstante bedeutet, für welche

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| c_\nu^{(1)} \varphi_\nu(s) \right| \leqq C$$

ist. $F_n(s) \to 0$ bedeutet aber $\lim_{n\to\infty} y_n(s) = \eta(s)$, und hieraus folgt $|y_{n+q}(s) - y_n(s)| < \varepsilon$ bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$, für hinreichend großes n und beliebiges positives q. Da aber nach (6)

$$|y_{n+q}(s) - y_n(s) = |\zeta_n(s) + \zeta_{n+1}(s) + \cdots + \zeta_{n+q-1}(s)|$$

ist, so ist die obige Feststellung gleichbedeutend mit der Konvergenz der Reihe (2') und also (2) für alle $|\lambda| < |\lambda_1|$. Wir haben somit den

Satz 2: *Dann und nur dann, wenn $|\lambda| < |\lambda_1|$ ist, streben für beliebiges $f(s)$ bei $n \to \infty$ die Fehlerfunktionen*

$$(10) \qquad F_n(s) = \eta(s) - y_n(s)$$

gleichmäßig in s gegen Null, d. h. $y_n(s) \to \eta(s)$. Daraus folgt, daß die C. Neumannsche Reihe (2) für alle $|\lambda| < |\lambda_1|$ konvergiert.

Wir wollen die *Neumannsche Reihe* anwenden auf einen Spezialfall, der für die historische Entwicklung der Theorie der linearen Integralgleichungen eine wichtige Rolle gespielt hat. Dazu setzen wir die freie Funktion $f(s) = K(s, t_0)$, behandeln also die spezielle Integralgleichung

$$(1') \qquad K(s, t_0) = H(s, t_0; \lambda) - \lambda \int_a^b K(s, \tau) H(\tau, t_0; \lambda)\, d\tau.$$

Dann haben wir in den Integralen der Rekursionsformel (4) gerade die iterierten Kerne, und (2) geht über in

$$(13) \quad H(s, t_0; \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} K^{(\nu+1)}(s, t_0) \cdot \lambda^\nu = K(s, t_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} K^{(\nu+1)}(s, t_0)\, \lambda^\nu.$$

Wenden wir (6), § 3, und (5), § 5, an, so haben wir

$$H(s, t_0; \lambda) = K(s, t_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^\nu \cdot \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{\varphi_\varkappa(s)\varphi_\varkappa(t_0)}{\lambda_\varkappa^{\nu+1}}$$

$$= K(s, t_0) + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \varphi_\varkappa(s)\,\varphi_\varkappa(t_0) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\lambda_\varkappa^\nu} \frac{1}{\lambda_\varkappa}.$$

Dann und nur dann, wenn $|\lambda| < |\lambda_1|$ ist, sind alle die in der letzten Summe stehenden geometrischen Reihen konvergent, und wir erhalten, wenn wir allgemein t statt t_0 schreiben,

$$(14) \qquad H(s, t; \lambda) = K(s, t) + \lambda \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{\varphi_\varkappa(s)\varphi_\varkappa(t)}{\lambda_\varkappa(\lambda_\varkappa - \lambda)}.$$

Der Leser möge sich selbst noch einmal direkt überlegen, daß die Reihe in (14) für alle λ konvergiert, die nicht einem der Eigenwerte gleich sind; aber die Potenzreihe, die wir aus (14) wieder rückwärts erhalten, wenn wir für $\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda_\varkappa}}$ jedesmal die geometrische Reihe einsetzen, setzt voraus, daß $|\lambda|$ kleiner ist als alle $|\lambda_\varkappa|$, d. h. $|\lambda| < |\lambda_1|$.

Die Lösung $H(s, t; \lambda)$ von (1′) nennt man den *Hilbertschen lösenden Kern*. Wenn wir nämlich die Lösung von (1′) für alle möglichen Werte von t_0 kennen, d. h. wenn wir die Funktion $H(s, t; \lambda)$ beherrschen, so können wir für jedes beliebige $f(s)$ die Lösung von (1) mittels einer einzigen Integration sofort hinschreiben. Es gilt der

Satz 3: *Ist $H(s, t; \lambda)$ die Lösung von* (1′) (*wobei wir uns im Einzelfalle jedesmal den Wert von t festgehalten denken*), *so ist für beliebiges $f(s)$ die Lösung von* (1) *gegeben durch*

$$(15) \qquad \eta(s) = f(s) + \lambda \int_a^b H(s, t; \lambda) f(t)\, dt.$$

Ein Beweis für diese Behauptung ergibt sich, wie der Leser zur Übung selbst nachrechnen möge, indem man in (15) für H den Wert (14) einsetzt und auf das dabei auftretende Glied $g(s) = \int_a^b K(s, t) f(t)\, dt$ den Schmidtschen Entwicklungssatz (S. 77) anwendet; es entsteht auf diese Weise gerade die E. Schmidtsche Auflösungsformel. Wir können Satz 3 aber auch direkt beweisen; es ist nämlich, wenn wir

den Wert von (15) einsetzen,

$$\eta(s) - \lambda \int_a^b K(s,\tau)\eta(\tau)d\tau = f(s) + \lambda \int_a^b H(s,t;\lambda)f(t)dt$$

$$- \lambda \int_a^b K(s,\tau)\left[f(\tau) + \lambda \int_a^b H(\tau,t;\lambda)f(t)dt\right]d\tau.$$

Ersetzen wir hier in dem ersten Integrale der rechten Seite $H(s, t; \lambda)$ durch den Wert, der sich aus (1') ergibt, so sieht man sofort, daß in der letzten Gleichung auf der rechten Seite nur $f(s)$ übrigbleibt; es ist also das durch (15) definierte $\eta(s)$ tatsächlich Lösung von (1) und Satz 3 bewiesen.

Schreiben wir die beiden Gleichungen (1) und (15) noch einmal untereinander, also

$$(1) \qquad f(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\eta(t)dt,$$

$$(15) \qquad \eta(s) = f(s) + \lambda \int_a^b H(s,t;\lambda)f(t)dt,$$

so erkennen wir eine ausgesprochene Reziprozität; an Stelle des Kernes $K(s, t)$ ist in (15) der neue Kern $H(s, t)$ getreten (wir denken λ im Augenblicke festgehalten), und die freie Funktion und die Lösung haben ihre Rollen vertauscht. Man nennt daher $H(s, t; \lambda)$ auch den *reziproken Kern* zu $K(s, t)$.

§ 8. Definite Kerne und der Mercersche Satz.

Wir setzen in diesem Paragraphen außer Symmetrie des Kernes noch Stetigkeit voraus.

Bei der Entwicklung der Schmidtschen Theorie haben wir gesehen, daß die Darstellungsmöglichkeit der iterierten Kerne in der Form

$$K^{(n)}(s,t) = \sum_{\nu=}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu{}^n}$$

eine besondere Rolle spielt. Der Satz 2 (S. 71) besagt, daß diese Reihe stets gleichmäßig in s und t konvergiert, wenn $n \geqq 3$ ist. Der Schmidtsche Entwicklungssatz (S. 77) gibt uns sofort die gleich-

mäßige Konvergenz der Entwicklung von

$$K^{(2)}(s,t)=\int_a^b K(s,\varrho)K(\varrho,t)\,d\varrho$$

in s bei festgehaltenem t (oder umgekehrt). Offen geblieben ist zunächst noch die Frage, ob

$$K^{(2)}(s,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}$$

gleichzeitig in s und t gleichmäßig konvergiert, wie es bei $n \geqq 3$ auch bei unstetigen Kernen der Fall ist. Und ferner erhebt sich die Frage, wann auch schon der Kern $K(s,t)$ selbst entwickelbar ist. Das ist, wie früher schon erwähnt wurde, durchaus nicht immer der Fall; es gibt aber eine große Klasse von Kernen, für die schon an sich die Reihenentwicklung

$$K(s,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$$

gilt, und zwar mit gleichmäßiger Konvergenz in s und t. Das sind gerade die Kerne, die in der Überschrift als *definite Kerne* bezeichnet sind. Da, wie wir sehen werden, der Kern $K^{(2)}(s,t)$ stets zu dieser Klasse gehört, so wird damit auch die erstgenannte Frage erledigt.

Bei dem Beispiele der schwingenden homogenen Saite haben wir in § 3, Kap. I, gesehen, daß das Doppelintegral

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l V(s,t)\,q(s)\,q(t)\,ds\,dt$$

die bei der Deformation infolge der Belastung $q(s)$ geleistete Arbeit, d. h. die dadurch in der Saite aufgespeicherte potentielle Energie bedeutet. U ist, wie die Belastung $q(s)$ auch gewählt wird, seiner physikalischen Natur nach stets positiv. Mathematisch bedeutet dies eine besondere Eigenschaft des dort gefundenen speziellen Kernes; denn i. a. wird das Doppelintegral

(1) $$D(q)=\int_a^b\int_a^b K(s,t)\,q(s)\,q(t)\,ds\,dt,$$

je nach der Wahl der Funktion $q(s)$ teils positive, teils negative Werte annehmen. Diejenigen Kerne, bei denen stets $D(q) \geqq 0$ ist,

bilden eine besondere Klasse, die wir die *definiten Kerne* nennen wollen. Genauer gilt folgende

Def.: Wird das Doppelintegral (1), für alle möglichen stetigen Funktionen $q(s)$ niemals negativ, so heißt der Kern $K(s,t)$ positiv definit, und zwar eigentlich positiv definit, wenn $D(q)=0$ nur in dem einzigen Falle $q(s)\equiv 0$ eintritt, dagegen positiv semidefinit, wenn es eine in $a\ldots b$ nicht identisch verschwindende Funktion $q^*(s)$ gibt, für welche $D(q^*)=0$ ist. — Analoges gilt für negativ definite Kerne.

Die definiten Kerne haben insofern eine besondere Bedeutung, als die in physikalischen Anwendungen auftretenden Kerne fast stets zu dieser Klasse gehören, wenigstens immer dann, wenn der Kern, wie in dem eben genannten Beispiele eine *Einflußfunktion* ist, so daß die physikalische Deutung des Doppelintegrales (1) eine Energie ergibt.

Wir dürfen uns im folgenden auf die positiv definiten Kerne beschränken, da ja $-K(s,t)$ ein solcher wird, wenn $K(s,t)$ selbst negativ definit ist.

Als Erstes wollen wir uns überlegen, daß ein Kern mit lauter positiven Eigenwerten sicher positiv definit ist. Ist nämlich $q(s)$ beliebig gewählt, so ist nach dem Schmidtschen Entwicklungssatze

$$\int_a^b K(s,t)\,q(t)\,dt=\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu\varphi_\nu(s) \tag{2}$$

eine gleichmäßig konvergente Reihe, und die Koeffizienten γ_ν sind gegeben durch

$$\gamma_\nu=\int_a^b\left\{\int_a^b K(s,t)\,q(t)\,dt\right\}\varphi_\nu(s)\,ds=\int_a^b\int_a^b K(s,t)\,\varphi_\nu(s)\,q(t)\,ds\,dt,$$

also, wenn wir das Integral nach s ausführen,

$$\gamma_\nu=\frac{1}{\lambda_\nu}\int_a^b q(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt. \tag{2'}$$

Bilden wir nun das Doppelintegral (1) und setzen darin (2) ein, so folgt

$$D(q)=\int_a^b q(s)\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu\varphi_\nu(s)\,ds.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz können wir die Reihenfolge von Integration und Summation vertauschen und erhalten, wenn

wir noch γ_ν durch (2') ausdrücken,

$$D(q) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} \int_a^b q(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt \cdot \int_a^b q(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds,$$

oder endlich

$$(3) \qquad D(q) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} \left\{ \int_a^b q(r)\,\varphi_\nu(r)\,dr \right\}^2 \geqq 0,$$

da ja nach Voraussetzung alle $\lambda_\nu > 0$ sind.

Umgekehrt läßt (3) sofort erkennen, daß, wenn $K(s, t)$ ein positiv definiter Kern ist, alle seine Eigenwerte positiv sein müssen. Denn dann ist nach Voraussetzung $D(q) \geqq 0$ für alle Funktionen $q(s)$, also auch, wenn wir speziell $q(s) = \varphi_n(s)$ wählen. Für diese spezielle Funktion aber reduziert sich wegen der Orthogonalität verschiedener Eigenfunktionen die Summe in (3) auf ein einziges Glied, und wir erhalten, wie auch direkt aus (1) abzulesen ist,

$$D(\varphi_n) = \frac{1}{\lambda_n} > 0.$$

Damit haben wir den

Satz 1: *Ein positiv definiter Kern hat nur positive Eigenwerte, und umgekehrt ist ein Kern mit lauter positiven Eigenwerten ein positiv definiter Kern.*

Das im Anfang dieses Paragraphen erwähnte Beispiel der Schwingung einer homogenen Saite bestätigt diesen Satz; denn wir haben in § 2, Kap. I, gesehen, daß die Eigenwerte in diesem Falle im wesentlichen die Quadrate der Schwingungszahlen sind, also positive Werte haben.

Semidefinit ist der Kern speziell dann, wenn für ein nicht identisch verschwindendes $q^*(s)$ der Ausdruck $D(q^*) = 0$ ist. Solche Kerne gibt es; wir können uns aus einem beliebigen $K(s, t)$ sofort einen derartigen Kern verschaffen, indem wir

$$K^*(s, t) = K(s, t) - \frac{\varphi_1(s)\varphi_1(t)}{\lambda_1}$$

setzen. Bilden wir mit $K^*(s, t)$ das Doppelintegral $D(q^*)$, wobei $q^*(s) = \varphi_1(s)$ gesetzt sein soll, so ergibt sich ohne weiteres $D(q^*) = 0$; d. h. $K^*(s, t)$ ist semidefinit. Aus (3) ersehen wir, daß allgemein dann und nur dann $D(q^*) = 0$ ist, wenn

$$(4) \qquad \int_a^b q^*(r)\,\varphi_\nu(r)\,dr = 0 \quad \text{für alle} \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

gilt, wenn also $q^*(s)$ zu allen Eigenfunktionen des Kernes orthogonal ist. In diesem Falle nennt man das System $\{\varphi_\nu(s)\}$ *nichtabgeschlossen* und überträgt diese Bezeichnung auf den zugehörigen Kern; denn nach Satz 2 in § 5 (S. 78) ist in diesem Falle auch

$$(4') \qquad g(s) = \int_a^b K(s,t)\, q^*(t)\, dt \equiv 0 .$$

Umgekehrt also ist ein *abgeschlossener* Kern ein solcher, dessen vollständiges Orthogonalsystem die Eigenschaft hat, daß (4) nur durch $q^*(s) \equiv 0$ befriedigt werden kann, und ebenso (4'). Wir bemerken also in Ergänzung zu Satz 1, daß ein semidefiniter Kern stets ein nichtabgeschlossener Kern ist, während ein abgeschlossener Kern, wenn er überhaupt definit ist, auch stets eigentlich definit ist.

Die Formel (3) ist nichts anderes, als die Übertragung eines Fundamentalsatzes aus der Transformationstheorie der quadratischen Formen. Dort wird gezeigt, daß jede quadratische Form

$$Q(x) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{hk} x_h x_k$$

durch eine geeignete lineare Substitution

$$x_r = b_{r1}\mathfrak{x}_1 + b_{r2}\mathfrak{x}_2 + \cdots + b_{rn}\mathfrak{x}_n \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

in eine Summe von Quadraten transformiert werden kann[1]), so daß also

$$Q(x) \equiv Q^*(\mathfrak{x}) = c_1\mathfrak{x}_1^2 + c_2\mathfrak{x}_2^2 + \cdots + c_n\mathfrak{x}_n^2$$

ist. $Q(x)$ ist dann und nur dann positiv definit, wenn bei dieser Transformation alle Koeffizienten $c_h \geqq 0$ sind; dem entspricht die Tatsache, daß bei einem positiv definiten Kerne alle Eigenwerte positiv sind.

Eine charakteristische Eigenschaft der definiten Kerne besteht also nach Satz 1 darin, daß alle Eigenwerte gleiches Vorzeichen haben. Dasselbe gilt nun aber auch, wie wir jetzt beweisen wollen, von den Funktionswerten des Kernes auf der Hauptdiagonalen des Grundgebietes; mit anderen Worten, wir behaupten

$$(5) \qquad K(s,s) \geqq 0 .$$

Wäre nämlich an irgendeiner Stelle $K(s_0, s_0) < 0$, so könnten wir wegen der vorausgesetzten Stetigkeit des Kernes um die Stelle

---

1) Vgl. z. B. Kowalewski, *Determinantentheorie*, § 106, oder Courant-Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik* I, S. 9, 10.

(s_0, s_0) als Mittelpunkt ein kleines Quadrat von der Seitenlänge 2δ abgrenzen, so daß $K(s, t)$ in diesem überall negativ ist, also

$$K(s,t) < 0 \quad \text{für} \quad s_0 - \delta \leqq \left\{ \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \right\} \leqq s_0 + \delta.$$

Nun können wir, sogar auf unendlich viele Arten, eine Funktion $q(s)$ so auswählen, daß diese auf der Teilstrecke $s_0 - \delta \ldots s_0 + \delta$ positiv ist, während sie sonst im Intervalle $a \ldots b$ verschwindet. Für eine solche Funktion $q(s)$ ist

$$D(q) = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(s,t)\, q(t)\, dt \right\} q(s)\, ds = \int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} \int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} K(s,t)\, q(s)\, q(t)\, ds\, dt < 0.$$

Es könnte also, wenn $K(s_0, s_0) < 0$ wäre, $K(s, t)$ nicht positiv definit sein. Damit haben wir den

Satz 2: *Bei einem positiv definiten Kerne ist für $a \leqq s \leqq b$ stets* $K(s, s) \geqq 0$.

Bei dem speziellen Kerne $V(s, t)$ der schwingenden Saite finden wir dies bestätigt.

Im Gegensatze zu Satz 1 ist Satz 2 nicht umkehrbar, d. h. ein Kern, für welchen stets (5) gilt, ist nicht notwendig definit. Das zeigt schon das einfache Beispiel $K(s, t) = s + t$ mit dem Grundintervalle $0 \ldots 1$, das wir S. 52 behandelt haben; denn es ist einerseits stets $s + t \geqq 0$, während wir als Eigenwerte $4\sqrt{3} - 6$ und $-4\sqrt{3} - 6$ gefunden haben, also einen positiven und einen negativen, so daß dieser Kern nach Satz 1 sicher nicht definit ist.

Die bedeutsamste Eigenschaft der definiten Kerne besteht nun darin, daß sie sich stets in die gleichmäßig in s und t konvergente Reihe

$$K(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} \tag{6}$$

entwickeln lassen. Dieser Satz ist zuerst von *Mercer* bewiesen worden.[1]) Als wesentliches Hilfsmittel werden wir einen wichtigen Satz der Analysis gebrauchen, den man *Dini* verdankt; er lautet:

Dinischer Satz: *Ist eine Summe stetiger, positiver Funktionen $p_\nu(s)$ in einem abgeschlossenen Intervalle $a \leqq s \leqq b$ konvergent und stellt diese Summe*

$$P(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu(s) \tag{7}$$

---

1) T. Mercer, Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations. *Trans. London Phil. Soc.* (A) Bd. 209 (1909), S. 415—446.

eine in diesem Intervalle stetige Funktion dar, so ist die Reihe gleichmäßig konvergent.

Der Dinische Satz ist also in gewissem Sinne eine Umkehrung des bekannten Satzes, daß eine in $a \ldots b$ gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen immer eine stetige Funktion darstellt.

Da der Dinische Satz eine Hauptstütze zu dem unten folgenden Beweise des Mercerschen Satzes ist, wollen wir ihn kurz ableiten. Die Reihe (7) ist gleichmäßig konvergent, wenn wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N angeben können, so daß für alle s in $a \leqq s \leqq b$ der Rest

$$\sum_{\nu=N}^{\infty} p_\nu(s) < \varepsilon \tag{8}$$

ist; denn dann ist dies wegen $p_\nu(s) \geqq 0$ auch für alle Reihenreste mit $n > N$ der Fall. Angenommen, (8) sei nicht möglich, so wäre es auch nicht möglich in mindestens einem der beiden Halbintervalle von $a \ldots b$, ebenso nicht in mindestens einem der beiden Viertelintervalle, in die wir dieses ausgezeichnete Halbintervall halbieren können usw. So bekommen wir, wenn (7) nicht gleichmäßig konvergent wäre, eine Folge von Teilintervallen $J_1, J_2, J_3, \ldots$, in denen (8) nicht möglich wäre. Jedes dieser Teilintervalle ist eine Hälfte des vorhergehenden; setzen wir also die Intervallschachtelung fort, so erhalten wir als Grenzwert eine Stelle s_0 des Grundintervalles. Wir wollen nun zeigen, daß wir in einer gewissen Umgebung von s_0 die Bedingung (8) erfüllen können, d. h. wir werden einen Widerspruch zu der oben gemachten Annahme konstruieren. Für den Wert s_0 ist die Reihe konvergent; wir können ein N finden, so daß

$$\sum_{\nu=N}^{\infty} p_\nu(s_0) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{9}$$

wird. Ferner sind nach Voraussetzung die $p_\nu(s)$ und die dargestellte Funktion $P(s)$ stetig für $a \leqq s \leqq b$, speziell also auch an der Stelle s_0. Es existiert also ein δ, so daß für $s_0 - \delta < s < s_0 + \delta$ gilt

$$\left| \sum_{\nu=1}^{N-1} p_\nu(s_0) - \sum_{\nu=1}^{N-1} p_\nu(s) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad |P(s_0) - P(s)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10}$$

Das N ist dabei das in (9) gewählte. Die zweite Ungleichung (10) besagt, wenn wir für $P(s)$ die unendliche Reihe einsetzen und bei N trennen,

$$\left| \sum_{\nu=1}^{N-1} p_\nu(s_0) - \sum_{\nu=1}^{N-1} p_\nu(s) + \sum_{\nu=N}^{\infty} p_\nu(s_0) - \sum_{\nu=N}^{\infty} p_\nu(s) \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

also mit Rücksicht auf die erste Ungleichung (10)

$$\left|\sum_{\nu=N}^{\infty} p_\nu(s_0) - \sum_{\nu=N}^{\infty} p_\nu(s)\right| < 2\,\frac{\varepsilon}{3},$$

also mit Benutzung von (9)

$$\sum_{\nu=N}^{\infty} p_\nu(s) < 2\,\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

und zwar gleichzeitig für alle s in $s_0 - \delta < s < s_0 + \delta$. Andererseits finden wir in der Reihe der obigen Halbierungsintervalle $J_1, J_2, \ldots,$ wenn wir weit genug fortschreiten, sicher ein Teilintervall J_k, welches ganz innerhalb $s_0 - \delta \ldots s_0 + \delta$ liegt, da ja s_0 allen J_n gemeinsam ist und deren Länge zu Null abnimmt. Wäre nun (7) nicht gleichmäßig konvergent in $a \leqq s \leqq b$, so wäre das auch in J_k nicht der Fall, während wir (8) sogar in dem größeren Intervalle $s_0 - \delta \ldots s_0 + \delta$ nachgewiesen haben; und das ist immer möglich, wie auch ε gewählt wird. Also ist die Annahme falsch und der Dinische Satz bewiesen.

Es sei noch bemerkt, daß die Abgeschlossenheit des Grundintervalles eine wesentliche Voraussetzung ist. Das lehrt schon das einfache Beispiel der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} s^\nu$, die für $0 \leqq s < 1$ konvergent ist und dort die stetige Funktion $\frac{s}{s-1}$ darstellt, aber nicht gleichmäßig konvergent ist. Der obige Beweis versagt in diesem Falle, weil der Grenzwertpunkt s_0 der eine Intervallpunkt (in dem genannten Beispiele 1) sein kann. Die Voraussetzung, daß (bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen) alle $p_\nu(s) \geqq 0$ sind, haben wir insofern benutzt, als dann mit $\sum_{\nu=N}^{\infty} p_\nu(s) \leqq \varepsilon$ auch für alle $n > N$ der Reihenrest $\sum_{\nu=n}^{\infty} p_\nu(s) \leqq \varepsilon$ ist.

Wir wenden uns nun zum Beweise des Mercerschen Satzes und nehmen also an, $K(s, t)$ sei ein positiv definiter Kern. Die erste Feststellung wird sein, daß

(11) $$\Phi(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu}$$

für $a \leqq s \leqq b$ konvergiert. (Hernach wird sich natürlich $\Phi(s) = K(s, s)$ ergeben.) Oben haben wir die Identität

$$(8) \quad D(q) = \int_a^b\int_a^b K(s, t)\, q(s)\, q(t)\, ds\, dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} \left\{ \int_a^b q(r)\, \varphi_\nu(r)\, dr \right\}^2$$

bewiesen; wenn wir bei den ersten n Gliedern das im Quadrate stehende Integral nach r einmal als Integral nach s, das andere Mal nach t schreiben und diese Glieder nach links herübernehmen, so erhalten wir

$$\int_a^b\int_a^b \left(K(s, t) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} \right) q(s)\, q(t)\, ds\, dt$$

$$= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} \left\{ \int_a^b q(r)\, \varphi_\nu(r)\, dr \right\}^2 \geqq 0.$$

Das besagt aber, daß

$$K^*(s, t) = K(s, t) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu(s)\, \varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$$

ein positiv definiter Kern ist; also ist speziell nach Satz 2 stets $K^*(s, s) \geqq 0$, oder aber, und zwar für jedes n,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu} \leqq K(s, s).$$

Es bleiben somit alle Partialsummen der Reihe (11), die ja lauter positive Glieder hat, unterhalb einer endlichen Zahl, womit (11) als konvergent nachgewiesen ist.

Aus (11) folgt nun sofort die Konvergenz von

$$(12) \qquad \Psi(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$$

durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung. Danach ist nämlich

$$\left(\sum_{\nu=n}^{n+p} \frac{|\varphi_\nu(s)|}{\sqrt{\lambda_\nu}} \frac{|\varphi_\nu(t)|}{\sqrt{\lambda_\nu}} \right)^2 \leqq \sum_{\nu=n}^{n+p} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu} \sum_{\nu=n}^{n+p} \frac{\varphi_\nu^2(t)}{\lambda_\nu} < \varepsilon^2$$

für hinreichend großes n und beliebige p, wegen (11). D. h. es ist (12) sogar absolut konvergent für beliebige s und t in $a \ldots b$. Aus dieser

Abschätzung folgt aber sogleich weiter, daß (12) bei festgehaltenem t gleichmäßig in s konvergiert; denn für den ersten Faktor rechts gilt ja

$$\sum_{\nu=n}^{n+p} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu} \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu} \leqq K(s, s) \leqq M,$$

wenn M den Maximalwert der stetigen Funktion $K(s, t)$ für $a \leqq s \leqq b$ und $a \leqq t \leqq b$ bedeutet. Wir erhalten also gleichzeitig für alle s

$$\sum_{\nu=n}^{n+p} \frac{|\varphi_\nu(s)|\,|\varphi_\nu(t)|}{\lambda_\nu} \leqq \sqrt{M} \sqrt{\sum_{\nu=n}^{n+p} \frac{\varphi_\nu^2(t)}{\lambda_\nu}} < \varepsilon,$$

wenn wir n hinreichend groß wählen.

Nun können wir leicht einsehen, daß

$$\Psi(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} = K(s, t) \tag{13}$$

ist; denn setzen wir etwa

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} - K(s, t) = h(s, t),$$

so ist, wenn wir t festhalten, $h(s, t) = g(s) \equiv 0$. Das folgt sofort daraus, daß $g(s)$ zu allen $\varphi_\nu(s)$ orthogonal ist, da ja wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (12) bei festem t

$$\begin{aligned} \int_a^b g(s)\varphi_\nu(s)\,ds &= \int_a^b \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} - K(s, t) \right\} \varphi_\nu(s)\,ds \\ &= \frac{\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} - \frac{\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

ist. Also ist zunächst nach (4) und (4'), S. 78,

$$\int_a^b K(s, t) g(s)\,ds = 0. \tag{15}$$

Bilden wir nun das Integral über $g^2(s)$, so haben wir

$$\int_a^b g^2(s)\,ds = \int_a^b g(s) \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} - K(s, t) \right\} ds = 0;$$

denn multiplizieren wir aus, so ist das erste Integral rechts Null wegen (14), und das zweite verschwindet wegen (15). Also muß

$$g^2(s) \equiv 0, \quad \text{d. h.} \quad g(s) \equiv 0$$

sein; oder es ist $h(s, t) \equiv 0$ für jedes t, d. h. (13) bewiesen.

Es bleibt als letztes nur noch die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (6) zu beweisen. Da sehen wir sogleich, daß wegen (13) und des Dinischen Satzes

$$(16) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu} = K(s, s)$$

gleichmäßig in s konvergiert; denn es stellt die Reihe der positiven Funktionen $\frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu}$ eine nach Voraussetzung stetige Funktion dar. Die gleichmäßige Konvergenz von (13) in s und t aber ergibt sich ohne weiteres aus der oben mittels der Schwarzschen Ungleichung gewonnenen Abschätzung

$$\left(\sum_{\nu=n}^{n+p} \frac{|\varphi_\nu(s)|\,|\varphi_\nu(t)|}{\lambda_\nu}\right)^2 \leqq M \sum_{\nu=n}^{n+p} \frac{\varphi_\nu^2(t)}{\lambda_\nu},$$

wenn wir beachten, daß wir wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (16) den zweiten Faktor rechts durch hinreichend großes n gleichzeitig für alle t beliebig klein machen können. Damit haben wir den wichtigen

Satz 3: *Mercerscher Satz. Ist $K(s, t)$ ein stetiger symmetrischer Kern, der (positiv oder negativ) definit ist, so gilt stets die Entwicklung*

$$(6) \qquad K(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu},$$

wo diese Reihe absolut konvergiert, und zwar gleichmäßig in beiden Variabeln s und t.

Damit ist auch die in der Vorbemerkung zu diesem Kapitel aufgeworfene Frage nach der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe für $K^{(2)}(s, t)$ erledigt. Es gilt der

Satz 4: *In allen Fällen ist die für den ersten iterierten Kern $K^{(2)}(s, t)$ gültige Entwicklung*

$$K^{(2)}(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}$$

in beiden Variabeln s und t absolut und gleichmäßig konvergent, wenn $K^{(2)}(s, t)$ stetig ist.

Der Beweis ist einfach mit der Bemerkung erbracht, daß $K^{(2)}(s, t)$ in den λ_ν^2 nur positive Eigenwerte besitzt und also ein positiv definiter Kern ist, auf den wir den Mercerschen Satz anwenden können.

Wenn ein Kern $K(s, t)$ nur endlich viele negative Eigenwerte besitzt, so gilt die Entwicklung (6) auch immer; denn es ist ja

$$K^*(s, t) = K(s, t) - \sum{}' \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu},$$

wo Σ' die endliche Summe über die negativen Eigenwerte bedeuten soll, ein positiv definiter Kern. Auf diesen können wir den Mercerschen Satz anwenden, und durch die endlich vielen Glieder von den negativen Eigenwerten her wird die Konvergenz nicht gestört.

Drittes Kapitel.

Anwendungen.

§ 1. Wärmeleitungsprobleme.

Als typisches Beispiel dieser Gruppe von Problemen wollen wir die Wärmeleitung in einem zylindrischen Stabe betrachten, dessen Querschnitt q klein sein möge gegenüber seiner Länge l. Der Grundgedanke, der zur Aufstellung der Differentialgleichung führt, besteht darin, daß die während einer kleinen Zeit $\Delta\tau$ in einem Stabstückchen entstehende Temperaturänderung bedingt wird durch die Differenz der während dieser Zeit einfließenden und abfließenden Wärmemenge. Es sei c die spezifische Wärme des Stabes, d. h. die Wärmemenge, die zugeführt werden muß, um seine Masseneinheit um 1° C zu erwärmen, und k seine Leitfähigkeit, d. h. die Wärmemenge, die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt 1 cm² hindurchströmt, wenn senkrecht zu diesem auf der Strecke von 1 cm ein Temperaturabfall von 1° C herrscht (Temperaturgradient). Die Dichte des als homogen angenommenen Stabes sei ϱ. Die Temperatur wird von dem Orte s und der Zeit τ abhängen; wir bezeichnen sie daher mit $\vartheta(s, \tau)$.

Wir betrachten (vgl. Fig. 3) ein kleines Stück des Stabes von der Länge ds. In der Zeit $\Delta\tau$ möge sich dessen Temperatur um $\Delta\vartheta$ ändern. Die Wärmemenge, die dazu erforderlich ist, ist gegeben durch $Q = c\varrho q\,ds\,\Delta\vartheta$. Ande-

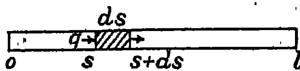


Fig. 3.

rerseits ist die bei s während der Zeit $\Delta\tau$ einströmende Wärmemenge $kq\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)\Delta\tau$, die bei $s+ds$ ausströmende analog $kq\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)_{s+ds}\Delta\tau$. Nun setzen wir in der bekannten Weise

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)_{s+ds}=\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)_s+\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}\right)_s ds,$$

indem wir in der Taylorschen Entwicklung die Glieder, die ds^2 oder höhere Potenzen enthalten, vernachlässigen. Die Differenz zwischen aus- und einströmender Wärmemenge ist demnach $kq\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}ds\,\Delta\tau$. Dies ist aber noch nicht die nach Ablauf des Zeitelementes $\Delta\tau$ in dem Volumstückchen verbliebene Wärmemenge, da ja auch noch seitlich durch Ausstrahlung Wärme abgegeben wird. Diese wird der Länge ds und der Zeit $\Delta\tau$ proportional sein und um so größer, je höher der Temperaturunterschied zwischen der Temperatur des Stabes und der der Umgebung ist. Letztere können wir o. B. d. A. als 0 annehmen (wir hätten ϑ auch von vornherein als den Unterschied der Temperaturen des Stabes und der als konstant vorausgesetzten Temperatur der Umgebung einführen können). Nennen wir den Proportionalitätsfaktor h (äußere Wärmeleitfähigkeit), so haben wir von dem obigen Ausdrucke noch den Betrag $h\vartheta ds\Delta\tau$ in Abzug zu bringen. So erhalten wir

$$c\varrho q\,ds\,\Delta\vartheta=kq\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}ds\Delta\tau-h\vartheta ds\Delta\tau,$$

oder, wenn wir mit ds kürzen, durch $\Delta\tau$ dividieren und $\Delta\tau\to 0$ gehen lassen,

(1) $$c\varrho q\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}=kq\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}-h\vartheta,$$

oder, wenn wir $\frac{h}{kq}=\alpha$, $\frac{c\varrho}{k}=\beta$ setzen,

(1') $$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2}-\alpha\vartheta=\beta\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}.$$

In dieser Gleichung haben wir zunächst nur eine Beziehung, der jeweils die Temperaturfunktion $\vartheta(s,\tau)$ genügen muß. Zur eindeutigen Festlegung des physikalischen Geschehens sind noch nähere Angaben, die Rand- und Nebenbedingungen notwendig. Bevor wir diese spezialisieren, wollen wir durch Benutzung des klassischen Ansatzes

(2) $$\vartheta(s,\tau)=e^{-\sigma\tau}\varphi(s),$$

wobei σ eine zunächst noch unbestimmte Konstante ist, die partielle

Differentialgleichung (1) auf eine gewöhnliche zurückführen. Setzen wir nämlich (2) in (1′) ein, so haben wir

$$e^{-\sigma\tau}\varphi''(s) - \alpha e^{-\sigma\tau}\varphi(s) = -\beta\sigma e^{-\sigma\tau}\varphi(s),$$

d. h. $\varphi(s)$ muß der homogenen Gleichung

$$\varphi''(s) = -(\sigma\beta - \alpha)\varphi(s) = -\lambda^2\varphi(s) \tag{3}$$

genügen. Die allgemeine Lösung von (3) ist

$$\varphi(s) = A\cos\lambda s + B\sin\lambda s. \tag{4}$$

Ist nun z. B. das Wärmeleitungsproblem dahin spezialisiert, daß die Stabenden dauernd auf der Temperatur 0 gehalten werden, so muß $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(l) = 0$ sein; d. h. es muß $A = 0$ und $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ sein ($n = 1, 2, \ldots$). Wir haben dann, nur mit anderer physikalischer Bedeutung der auftretenden Konstanten, dieselben Verhältnisse, wie sie in Kap. I bei dem Problem der homogenen Saite besprochen sind. Daher wollen wir uns hier mit einem anderen Falle beschäftigen, nämlich dem, daß an den Stabenden Ausstrahlung in die Umgebung stattfindet. Wir sahen oben schon, daß allgemein in der Zeit $\Delta\tau$ durch den Querschnitt bei s die Wärmemenge $kq\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\Delta\tau$ hindurchströmt. Beachten wir, daß an den beiden Enden die Ausstrahlungsrichtung entgegengesetzt ist, so haben wir die beiden Randbedingungen

$$kq\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)_{s=0} = H\vartheta(0,\tau); \qquad -kq\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right)_{s=l} = H\vartheta(l,\tau), \tag{5}$$

oder, wenn wir für $\vartheta(s,\tau)$ wieder den Wert (2) einsetzen,

$$kq\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{s=0} = H\varphi(0); \qquad -kq\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{s=l} = H\varphi(l). \tag{5'}$$

Durch diese Bedingungen sind die in Frage kommenden Werte von λ in (4) und damit die von σ in (2) festgelegt; denn (5′) besagt

$$kqB\lambda = HA$$

$$kq(A\lambda\sin\lambda l - B\lambda\cos\lambda l) = H(A\cos\lambda l + B\sin\lambda l).$$

Hieraus ergibt sich, wenn wir den Wert $\frac{A}{B} = \frac{kq\lambda}{H}$ aus der ersten Gleichung in die zweite einsetzen,

$$\frac{kq\lambda}{H}\sin\lambda l - \cos\lambda l = \cos\lambda l + \frac{H}{kq\lambda}\sin\lambda l$$

oder nach einfacher Umrechnung

$$(6) \qquad \operatorname{tg} \lambda l = \frac{2 k q \lambda H}{k^2 q^2 \lambda^2 - H^2}.$$

Diese transzendente Bedingungsgleichung für λ können wir noch leicht etwas bequemer gestalten. Wir setzen $\lambda l = 2\xi$; dann geht (6) über in

$$\frac{2 \operatorname{tg} \xi}{1 - \operatorname{tg}^2 \xi} = \frac{4\xi \frac{Hl}{kq}}{4\xi^2 - \frac{H^2 l^2}{k^2 q^2}},$$

oder, wenn wir noch $\frac{Hl}{kq} = \gamma$ setzen, nach elementarer Umformung

$$[2\xi \operatorname{tg} \xi - \gamma][2\xi + \gamma \operatorname{tg} \xi] = 0.$$

D. h. die Gleichung (6) wird dann und nur dann befriedigt, wenn eine der beiden folgenden Beziehungen erfüllt ist:

$$(7) \qquad \xi \operatorname{tg} \xi = \frac{\gamma}{2} \quad \text{oder} \quad \xi \cot \xi = -\frac{\gamma}{2}.$$

Man zeigt leicht, daß (7) nur durch reelle Werte von ξ befriedigt werden kann; das bedeutet aber wegen $\lambda l = 2\xi$, daß λ stets reell, λ^2 in (3) also positiv sein muß. Wir wollen das hier nicht im einzelnen ausführen, sondern die von der Differentialgleichung ausgehende Untersuchung hier abbrechen und uns kurz überlegen, wie wir durch Zurückführung auf eine Integralgleichung dasselbe Problem behandeln und zu Ende führen können.

Dazu gehen wir analog vor, wie bei der schwingenden Saite, indem wir zunächst den stationären Fall betrachten, bei welchem keine zeitliche Änderung der Temperatur stattfindet. Ferner wollen wir der Einfachheit halber von seitlicher Ausstrahlung absehen, d. h. in (1) $h = 0$ setzen. (Der Stab sei also in eine wärmeisolierende Hülle eingebettet.) Ebenso, wie wir bei dem Saitenprobleme in Kap. I ausgingen von der statischen Durchbiegung unter dem Einflusse einer Einzellast, wollen wir hier zunächst nach der stationären Temperaturverteilung fragen, wie sie sich bei Vorhandensein einer *Quelle von der Ergiebigkeit* 1 an der Stelle t des Stabes einstellt. Eine Quelle ist dadurch gekennzeichnet, daß die Ableitung der Temperaturfunktion nach s dort einen Sprung hat; denn ist sie stetig, so bedeutet dies ja nach den obigen Ausführungen, daß an dieser Stelle während der Zeiteinheit eine gleich große Wärmemenge von links her einströmt, wie sie nach rechts hin abfließt. Die Größe des Sprunges der Ableitung nennen wir die Ergiebigkeit der Quelle und

wollen also nun annehmen, es sei an der Stelle t des Stabes eine solche Quelle von der Ergiebigkeit 1 vorhanden. Dann wird sich, wenn nach wie vor die Randbedingungen (5) bestehen bleiben, eine bestimmte stationäre Temperaturverteilung einstellen, die wir, um die Abhängigkeit von der Lage der Wärmequelle bei t zu berücksichtigen, mit $\Theta(s, t)$ bezeichnen wollen. Nach (1) genügt $\Theta(s, t)$ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Theta(s,t)}{\partial s^2} = 0. \tag{8}$$

Da $\Theta(s, t)$ selbst stetig ist und ebenso die Ableitung, außer an der Stelle t, so haben wir

$$\Theta(s,t) = \begin{cases} as + b & \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq t, \\ cs + d & \text{für} \quad t \leqq s \leqq l, \end{cases} \tag{9}$$

wobei aber a, b, c, d noch von t abhängen werden. Entsprechend der Ergiebigkeit 1 der Quelle bei t haben wir

$$\left(\frac{\partial \Theta(s,t)}{\partial s}\right)_{s=t-0} - \left(\frac{\partial \Theta(s,t)}{\partial s}\right)_{s=t+0} = 1. \tag{10}$$

Dies zusammen mit der Stetigkeitsforderung von $\Theta(s, t)$ ergibt zwei Bedingungen für die vier Größen a, b, c, d; zwei weitere werden durch die beiden Randbedingungen (5) geliefert

$$\left(\frac{\partial \Theta(s,t)}{\partial s}\right)_{s=0} = \frac{H}{kq}\,\Theta(0,t); \quad -\left(\frac{\partial \Theta(s,t)}{\partial s}\right)_{s=l} = \frac{H}{kq}\,\Theta(l,t).$$

So erhalten wir im ganzen, wenn wir noch $\frac{H}{kq} = H_0$ setzen, die vier Bestimmungsgleichungen

$$\begin{cases} at + b = ct + d & \text{(Stetigkeitsforderung)}, \\ a - c = 1 & \text{(Ergiebigkeit der Quelle)}, \\ a = H_0 b; \quad -c = H_0(cl + d) & \text{(Randbedingungen)}. \end{cases} \tag{11}$$

Hieraus ergibt sich, wenn wir in der ersten Gleichung a aus der dritten, d aus der vierten einsetzen,

$$(H_0 t + 1)\, b = ct - \frac{1 + H_0 l}{H_0}\, c$$

und weiter, indem wir c über die zweite Gleichung aus der dritten ausdrücken,

$$(H_0 t + 1)\, b = (H_0 b - 1)\, t - \frac{1 + H_0 l}{H_0}\,(H_0 b - 1).$$

Daraus ergibt sich b zu $\quad b = \frac{1 + H_0(l - t)}{2H_0 + H_0^2 l}.$

Für die drei anderen Größen erhalten wir dann aus (11) die Werte

$$a = \frac{1 + H_0(l - t)}{2 + H_0 l}; \quad c = -\frac{1 + H_0 t}{2 + H_0 l}; \quad d = \frac{1 + H_0 l + H_0(1 + H_0 l)t}{2H_0 + H_0^2 l}.$$

Setzen wir diese in (9) ein, so folgt schließlich für $\Theta(s, t)$ der Ausdruck

$$(12)\quad \Theta(s,t) = \begin{cases} \dfrac{-H_0^2 st + H_0(1 + H_0 l)s - H_0 t + (1 + H_0 l)}{H_0(2 + H_0 l)} & \text{für } 0 \leqq s \leqq t, \\[2ex] \dfrac{-H_0^2 st - H_0 s + H_0(1 + H_0 l)t + (1 + H_0 l)}{H_0(2 + H_0 l)} & \text{für } t \leqq s \leqq l. \end{cases}$$

Dies ist eine in s und t symmetrische Funktion, wie man sogleich bestätigt, wenn man irgend zwei Werte $x < y$ in $a \ldots b$ wählt und das eine Mal $s = x, t = y$, das andere Mal $s = y, t = x$ setzt. $\Theta(s, t)$ wird in analoger Weise wie die Funktion $V(s, t)$ bei der schwingenden Saite auch hier als Kern der Integralgleichung auftreten. Zunächst sehen wir, daß die Temperaturverteilung sich mit q multipliziert, wenn die Ergiebigkeit der Quelle nicht 1, sondern q ist. Haben wir ferner nicht eine, sondern etwa n Quellen mit den Ergiebigkeiten $q_1, q_2, \ldots q_n$, so dürfen wir das Gesetz der Superposition anwenden; physikalisch ist dies durch das Experiment begründet und findet seinen mathematischen Ausdruck in der Homogenität der linearen Differentialgleichung. Danach ist in diesem Falle die Temperaturverteilung gegeben durch $\sum_{\nu=1}^{n} \Theta(s, t_\nu) q_\nu$. Und endlich ergibt sich diese, bei kontinuierlicher Verteilung der Quellen derart, daß einem Stabelement dt die Ergiebigkeit $q(t)\,dt$ zukommt, zu

$$(13)\qquad \vartheta(s) = \int_0^l \Theta(s, t) q(t)\,dt.$$

Umgekehrt können wir uns eine jede physikalisch mögliche Temperaturverteilung hervorgerufen denken durch eine geeignete Quellenverteilung von der *Ergiebigkeitsdichte* $q(t)$.

Zwischen den beiden Funktionen $\vartheta(s)$ und $q(s)$ besteht zufolge des linearen Baues des Kernes $\Theta(s, t)$ ein sehr einfacher Zusammenhang; es ist nämlich

$$(14)\qquad \vartheta''(s) = -q(s).$$

Um das einzusehen, schreiben wir (13) in der Form

$$\vartheta(s) = \int_0^s \Theta_2(s, t) q(t)\,dt + \int_s^l \Theta_1(s, t) q(t)\,dt,$$

wobei wir unter $\Theta_1(s, t)$ den oberen Ausdruck, unter $\Theta_2(s, t)$ den unteren in der Formel (12) verstehen. Dann ist

$$\vartheta'(s) = \int_0^s \frac{\partial \Theta_2(s,t)}{\partial s} q(t)\,dt + \int_s^l \frac{\partial \Theta_1(s,t)}{\partial s} q(t)\,dt,$$

da sich die beiden von der oberen bzw. unteren Grenze s herrührenden Beiträge wegen $\Theta_2(s, s) = \Theta_1(s, s)$ aufheben. Setzen wir in der letzten Gleichung aus (12) ein, so haben wir

$$(15)\quad \vartheta'(s) = \frac{-1}{2 + H_0 l}\left\{H_0 \int_0^l t\,q(t)\,dt + \int_0^s q(t)\,dt - (1 + H_0 l)\int_s^l q(t)\,dt\right\},$$

woraus sich durch nochmalige Differentiation sofort die Behauptung (14) ergibt.

Wir greifen nun das allgemeine Wärmeleitungsproblem des Stabes wieder auf und gehen dabei analog vor wie bei dem Übergange von der statischen Belastung zur Schwingung der Saite (vgl. Kap. I, § 2). Machen wir wieder den obigen Ansatz

$$(2)\qquad \vartheta(s, \tau) = e^{-\sigma\tau}\varphi(s),$$

so ist, da jetzt $h = 0$ und also in (1′) $\alpha = 0$ ist,

$$(3')\qquad \varphi''(s) = -\beta\sigma\varphi(s) \qquad \left(\beta = \frac{c\varrho}{k}\right).$$

Andererseits ist $\varphi(s)$ eine mögliche Temperaturverteilung im Stabe, also nach den obigen Ausführungen in der Form

$$\varphi(s) = \int_0^l \Theta(s, t)\,q(t)\,dt$$

darstellbar. Nach (14) ist $-q(s) = \varphi''(s)$. In Verbindung mit (3′) liefert dies, wenn wir noch $\beta\sigma = \lambda^2$ setzen,

$$(16)\qquad \varphi(s) = \lambda^2 \int_0^l \Theta(s, t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Das bedeutet, daß die in Frage kommenden Funktionen $\varphi(s)$ des Ansatzes (2) die Eigenfunktionen des Kernes $\Theta(s, t)$ sind und daß die Konstante σ auf die Werte σ_n beschränkt ist, für welche $\beta\sigma_n = \lambda_n^2$ Eigenwert von $\Theta(s, t)$ ist. Wir haben also die Eigenfunktionen und Eigenwerte von $\Theta(s, t)$ zu ermitteln. Wegen (14) wissen

wir, daß $\varphi_n(s)$ die Gestalt

$$\varphi_n(s) = A\cos\lambda_n s + B\sin\lambda_n s \tag{17}$$

hat und daß die λ_n wegen der Randbedingungen (5) der Gleichung (6) genügen müssen. Zur Kontrolle aber wollen wir dies, ausgehend vom Kerne $\Theta(s, t)$, noch einmal direkt ableiten. Aus (17), (16), (12) und (15) folgt

$$\varphi_n(0) = A = \lambda_n^2 \int_0^l \frac{-H_0 t + 1 + H_0 l}{H_0(2 + H_0 l)} [A\cos\lambda_n t + B\sin\lambda_n t]\,dt,$$

$$\varphi_n'(0) = B\lambda_n = \lambda_n^2 \int_0^l \frac{-H_0 t + 1 + H_0 l}{2 + H_0 l} [A\cos\lambda_n t + B\sin\lambda_n t]\,dt = H_0 A,$$

oder, mit Rücksicht auf $H_0 = \frac{H}{kq}$,

$$kqB\lambda_n = HA.$$

Ebenso bestätigt man durch Einsetzen des Wertes für $\Theta(s, t)$, daß $\varphi_n'(l) = -H_0\varphi_n(l)$ ist, und erhält daraus

$$kq(A\lambda_n \sin\lambda_n l - B\lambda_n \cos\lambda_n l) = H(A\cos\lambda_n l + B\sin\lambda_n l).$$

Aus diesen beiden Beziehungen aber ergibt sich, wie wir oben schon sahen, die Relation (6). Dort gaben wir an, daß die Wurzeln dieser transzendenten Gleichung reell sind, ohne es zu beweisen. Das wollen wir nun nachholen und damit hinterher rechtfertigen, daß wir die Eigenwerte des Kernes $\Theta(s, t)$ als positive Werte mit λ_n^2 bezeichnet haben. Nach Kap. II, § 8, wissen wir, daß es dazu genügt, $\Theta(s, t)$ als positiv definit nachzuweisen. Das tun wir, indem wir zeigen, daß für jedes $q(s)$ das Doppelintegral

$$D(q) = \int_0^l\int_0^l \Theta(s, t)q(s)q(t)\,ds\,dt = \int_0^l q(s)\left\{\int_0^l \Theta(s, t)q(t)\,dt\right\}ds > 0$$

ist. Das innere Integral bezeichnen wir mit $\vartheta(s)$, wobei $\vartheta(s)$ nach (13) die Bedeutung der Temperaturverteilung im Stabe hat, wenn die Ergiebigkeitsdichte der Wärmequellen gerade $q(t)$ ist. Dann ist, mit Rücksicht auf (14),

$$D(q) = -\int_0^l \vartheta''(s)\cdot\vartheta(s)\,ds.$$

Durch partielle Integration folgt hieraus

$$D(q) = -[\vartheta(s)\vartheta'(s)]_0^l + \int_0^l (\vartheta'(s))^2 ds,$$

und das ist stets positiv; denn das rechts stehende Integral ist sicher > 0, und $\vartheta(s)$ genügt zufolge der eben angegebenen physikalischen Bedeutung nach den früheren Ausführungen den Randbedingungen

$$\vartheta'(l) = -H_0\vartheta(l); \quad \vartheta'(0) = H_0\vartheta(0).$$

(Der Leser prüfe dies zur Kontrolle noch einmal direkt nach, indem er $\Theta(0, t)$ bzw. $\Theta(l, t)$ aus (12) in (13) einsetzt und andererseits (15) benutzt.) H_0 ist eine positive Konstante, und also ist auch $-[\vartheta(s)\vartheta'(s)]_0^l > 0$. Damit ist bewiesen, daß $\Theta(s, t)$ ein positiv definiter Kern ist und wir die Eigenwerte tatsächlich mit λ_n^2 bezeichnen durften.

Setzen wir nun in (2) für $\varphi(s)$ irgendeine der Eigenfunktionen $\varphi_n(s)$ von $\Theta(s, t)$ ein, so ist

$$\vartheta_n(s, \tau) = e^{-\frac{\lambda_n^2}{\beta^2}\tau}\varphi_n(s)$$

eine Funktion, welche der Differentialgleichung der Wärmeleitung und den Randbedingungen (5) genügt. Dasselbe gilt wegen des homogenen und linearen Baues der Gleichung (1) offenbar auch von der Summe

(18) $$\vartheta(s, \tau) = \sum \gamma_n \varphi_n(s) e^{-\frac{\lambda_n^2}{\beta^2}\tau},$$

bei einer endlichen Summe stets, bei einer unendlichen jedenfalls formal, während über die Konvergenz gleich noch zu sprechen sein wird.

Der physikalische Vorgang der Wärmeleitung im Stabe ist erst dann eindeutig festgelegt, wenn ein zeitlicher Anfangszustand gegeben ist, d. h. wenn etwa $\vartheta(s, 0) = g(s)$ eine bekannte Funktion ist. (18) liefert uns dann den gesuchten Temperaturverlauf, wenn die Reihe konvergiert und die Anfangsbedingung $\vartheta(s, 0) = g(s)$ befriedigt, wenn also

(18') $$g(s) = \vartheta(s, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \varphi_n(s)$$

ist; denn dann ist (18) sicher konvergent, da in (18) gegenüber (18') die einzelnen Glieder mit den Faktoren $e^{-\frac{\lambda_n}{\beta^2}\tau}$ versehen sind, die mit wachsendem n schnell gegen Null streben. Nun ist aber $g(s)$ der physikalischen Natur nach eine mögliche Temperaturverteilung im

Stabe; d. h. wir können $g(s)$ in der Form (18), also als Kernintegral darstellen. Mathematisch bedeutet das nach dem Schmidtschen Entwicklungssatze, daß (18′) gilt, und zwar sind die γ_n hier, und also auch in (18), die Fourierkoeffizienten

$$\gamma_n = \int_0^l \vartheta(s, 0)\varphi_n(s)\,ds.$$

Gerade in dieser Möglichkeit, die Konvergenzfrage zu klären und damit die Existenz der Lösung nachzuweisen, beruht ein großer Vorzug der Anwendung der Integralgleichung. Bei anderen Randbedingungen statt (5) ist die Durchführung ganz analog; nur wird statt des obigen $\Theta(s, t)$ ein anderer Kern auftreten; denn die Integralgleichung vertritt die Differentialgleichung einschließlich der jeweiligen Randbedingung.

Wenn wir auch in Anwendung der Resultate der allgemeinen Theorie wichtige Eigenschaften, wie das definite Verhalten des Kernes (positive Eigenwerte) und die Existenz der Lösung folgern können, so bleibt doch für die numerische Durchführung der Rechnung hier ebenso wie bei der Behandlung mit Hilfe der Differentialgleichung die Schwierigkeit bestehen, die Eigenwerte und Eigenfunktionen und damit die Lösung wirklich zu ermitteln. Das wird im allgemeinen auch gar nicht möglich sein, sondern man wird sich meist mit einer angenäherten Lösung begnügen müssen, wobei speziell auch zu untersuchen ist, wie gut die Approximation die wahre Lösung wiedergibt. Einen Fall dieser Art aus einem anderen physikalischen Anwendungsgebiete wollen wir in den nächsten Paragraphen kennenlernen.

§ 2. Der auf Biegung und Knickung beanspruchte Balken.

Wir betrachten einen homogenen Balken von der Länge l und überall gleichem Querschnitte, der an seinen beiden Enden auf Stützen gelagert ist, und fragen uns, in welcher Weise er sich durchbiegt, wenn er vertikal zu seiner Längsrichtung belastet wird. Dabei wollen wir uns, analog wie in dem Beispiele der schwingenden Saite, auf den Fall sehr kleiner Deformationen beschränken. Der Grundgedanke, nach welchem in der Festigkeitslehre dieses Problem behandelt wird, ist der folgende: An dem Querschnitte an einer beliebigen Stelle s — wir legen die s-Achse in die Längsrichtung des Balkens — wird eine Kraft von dem linken Teile auf den rechten übertragen, und die Krümmung des Balkens an dieser Stelle ist dem

Momente der übertragenen Kraft, bezogen auf den betrachteten Punkt s, proportional; es ist also, wenn ϱ den Krümmungsradius bei s bedeutet,

$$\frac{1}{\varrho} = k \cdot |M(s)|. \tag{1}$$

$M(s)$ nennt man das *Biegungsmoment.* Zum besseren Verständnisse wollen wir dieses Biegungsmoment noch ein wenig genauer erläutern. Betrachten wir das spezielle Beispiel, daß auf den an seinen beiden Enden gestützten Balken nur an einer Stelle s_1 eine Kraft P vertikal einwirkt (vgl. Fig. 4), so wird dieser durch die beiden *Auflagerkräfte* A und B an den Balkenenden das Gleichgewicht gehalten. Ist nun $s < s_1$, so ist die einzige, bei s von links her übertragene Kraft A und das Biegungsmoment also $M(s) = As$, und zwar mit diesem Vorzeichen, wenn wir, wie üblich, das Moment positiv rechnen, sobald es den linken Balkenteil gegen den rechten nach rechts dreht. Ist dagegen $s > s_1$, so wird an dieser Querschnittstelle außer A auch P noch von links nach rechts übertragen, und das Moment wird demnach $M(s) = As - P \cdot (s - s_1)$; das zweite Glied ist negativ, weil dieses Teilmoment links um die Stelle s zu drehen bestrebt ist.

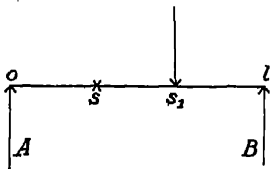


Fig. 4.

Wirken mehrere Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_m$ bei $s_1, s_2, \ldots s_m$ vertikal auf den Balken, so ist in leicht verständlicher Schreibweise allgemein

$$M(s) = As - \sum_{s_\nu < s} P_\nu (s - s_\nu). \tag{2}$$

Haben wir statt der Einzelkräfte eine kontinuierliche Belastung von der Dichte $q(s)$, so wirkt an der Stelle ξ auf ein kleines Balkenstück von der Länge $d\xi$ die Kraft $q(\xi)\,d\xi$. An Stelle der endlichen Summe tritt das Integral, und wir erhalten für das Biegungsmoment den Ausdruck

$$M(s) = As - \int_0^s q(\xi)(s - \xi)\,d\xi. \tag{2'}$$

Wir entnehmen hieraus noch eine oft wertvolle Beziehung zwischen dem Biegungsmomente und der Belastungsdichte; es ist nämlich, wie man sofort ausrechnet,

$$\frac{d^2 M(s)}{ds^2} = -q(s). \tag{3}$$

Bei gegebenem $q(s)$ erhalten wir also das Biegungsmoment als Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die beiden Integrationskonstanten ergeben sich in unserem Beispiele des an den Enden gelagerten Balkens durch die Nebenbedingungen

$$(3') \qquad M(0) = 0 \quad \text{und} \quad M(l) = 0\,.$$

Nach dieser Unterbrechung kehren wir zu unserer Hauptaufgabe, der Durchbiegung des Balkens zurück. Der einfachste Fall besteht darin, daß der Balken durch zwei gleich starke, entgegengesetzt gerichtete Momente, die an seinen beiden Enden angreifen, kreisförmig verbogen wird. Dann wird in der Festigkeitslehre als einfache Folge des Hookeschen Gesetzes gezeigt, daß der Proportionalitätsfaktor k in (1) genau gegeben ist durch

$$(4) \qquad k = \frac{1}{EJ}\,;$$

dabei bedeutet E eine Materialkonstante, nämlich den Elastizitätsmodul (z. B. für Stahl $2{,}2 \cdot 10^6$ kg/cm²), und J eine geometrische, durch die Gestalt des Querschnittes bestimmte Konstante, nämlich das Trägheitsmoment, bezogen auf die senkrecht zur Längsrichtung des Balkens und senkrecht zur Richtung der Belastung durch den Schwerpunkt des Querschnittes gelegte Achse. Es ist also, wenn wir diese als $\mathfrak{x}$-Achse bezeichnen und, vom Schwerpunkt an gerechnet, senkrecht dazu eine $\mathfrak{y}$-Achse in dem Querschnitt einführen (vgl. Fig. 5), dieses Trägheitsmoment

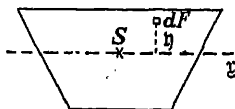


Fig. .

$$J = \iint \mathfrak{y}^2 dF.$$

Die Bedeutung (4) des Proportionalitätsfaktors k wird nun übertragen auch auf den Fall, daß das Moment $M(s)$ von irgendwelchen Kräften herrührt. Die Erfahrung bestätigt, daß diese Näherung bei der Beschränkung auf kleine Deformationen durchaus gestattet ist. Vorausgesetzt ist dabei stets, daß die Belastung in einer der sogenannten Hauptträgheitsachsen erfolgt, d. h. daß

$$\iint \mathfrak{x}\mathfrak{y}\, dF = 0$$

ist. Mechanisch bedeutet dies, daß die Summe der inneren Momente um die $\mathfrak{y}$-Achse Null ist.

Die Durchbiegung an der Stelle s wollen wir mit $y(s)$ bezeichnen und nach unten positiv rechnen. Dann ist

$$\frac{1}{\varrho(s)} = \frac{y''(s)}{\sqrt{1 + y'(s)^2}^{\,3}}\,.$$

Da nach unserer Voraussetzung nur sehr kleine Durchbiegungen zugelassen sind, so können wir ohne merklichen Fehler die Größe y'^2 gegen die 1 im Radikanden des Nenners vernachlässigen und erhalten so aus (1) und (4) für die Durchbiegung $y(s)$ die Differentialgleichung

$$y''(s) = -\frac{1}{EJ} M(s). \tag{5}$$

Dabei ist das Minuszeichen durch die obige Festlegung des Vorzeichens des Momentes und durch die Wahl der y-Richtung bedingt.

Wir wollen nun den allgemeineren Fall betrachten, daß auf den Balken gleichzeitig eine vertikale Last von der Dichte $q(s)$ und eine horizontale Kraft P einwirkt, die ihn zusammenzudrücken sucht (vgl. Fig. 6). Dann gilt nach wie vor (5); aber das Moment $M(s)$ setzt sich zusammen aus dem Momente $\mu(s)$, das von der Belastung $q(s)$ herrührt, und aus dem Momente $P\,y(s)$. Wir haben also

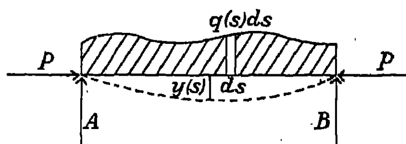


Fig. 6.

$$y''(s) = -\frac{P}{EJ} y(s) - \frac{1}{EJ} \mu(s). \tag{6}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung muß in unserem Beispiele noch die Randbedingungen $y(0) = 0$ und $y(l) = 0$ erfüllen, da der Balken an seinen beiden Enden gelagert sein soll.

Im folgenden wollen wir für $y(s)$ eine Integralgleichung aufstellen. Diese wird, wie wir das schon im vorigen Paragraphen bei der Wärmeleitung ebenso sahen, an Stelle der Differentialgleichung einschließlich der Randbedingungen treten. Unsere früheren Überlegungen bei der Durchbiegung einer Saite infolge statischer Belastung lassen uns dabei an den Kern

$$K(s,t) = \begin{cases} \dfrac{s(l-t)}{l} & \text{für} \quad s \leqq t, \\[2ex] \dfrac{t(l-s)}{l} & \text{für} \quad s \geqq t \end{cases} \tag{7}$$

denken. In der Tat gilt bei dieser Bedeutung von $K(s,t)$ für jede zweimal differenzierbare Funktion $y(s)$, welche für $s = 0$ und $s = l$ verschwindet, die Identität

$$y(s) = -\int_0^l K(s,t)\, y''(t)\, dt. \tag{8}$$

Man bestätigt (8) sehr leicht durch zweimaliges Differenzieren nach s, oder, indem man das Intervall $0 \ldots l$ in $0 \leqq t \leqq s$ und $s \leqq t \leqq l$ zerlegt, für $K(s, t)$ die Werte aus (7) einsetzt und partiell integriert. Dann haben wir nämlich

$$\int_0^l K(s,t)\, y''(t)\, dt = \int_0^s \frac{t(l-s)}{l} y''(t)\, dt + \int_s^l \frac{s(l-t)}{l} y''(t)\, dt$$

$$= \frac{l-s}{l}\left\{[y'(t)t]_0^s - \int_0^s y'(t)\, dt\right\} + \frac{s}{l}\left\{[(l-t)\, y'(t)]_s^l + \int_s^l y'(t)\, dt\right\},$$

und das ergibt zusammengefaßt mit Rücksicht auf $y(0) = 0$ und $y(l) = 0$ in der Tat $-y(s)$, d. h. (8) ist bewiesen.

Setzen wir in (8) für $y''(t)$ den Wert aus (6) ein, so erhalten wir

$$y(s) = \frac{1}{EJ}\int_0^l K(s,t)\, \mu(t)\, dt + \frac{P}{EJ}\int_0 K(s,t)\, y(t)\, dt.$$

Hierin hat das erste Glied auf der rechten Seite eine einfache mechanische Bedeutung; es ist nämlich die Durchbiegung des Balkens bei alleiniger vertikaler Belastung. Da diese uns durch $q(s)$ gegeben ist und zwischen $\mu(s)$ und $q(s)$ die Beziehung (8) besteht, so ist uns in der letzten Gleichung das erste Integral bekannt, und wir haben den

Satz 1: *Wird ein Balken von der Länge l, der an seinen beiden Enden gelagert ist, durch eine vertikale Belastung von der Dichte $q(s)$ und eine gegebene Kraft P in seiner Längsrichtung beansprucht, so genügt die dadurch hervorgerufene Durchbiegung $y(s)$ einer linearen Integralgleichung mit symmetrischem Kerne*

$$y(s) = f(s) + \lambda \int_0^l K(s,t)\, y(t)\, dt. \tag{9}$$

Dabei bedeutet $K(s, t)$ den Kern (7), während

$$\lambda = \frac{P}{EJ} \quad \textit{und} \quad f(s) = \frac{1}{EJ}\int_0^l K(s,t)\, \mu(t)\, dt \tag{9'}$$

gesetzt ist. $\mu(s)$ ist das sogenannte Biegungsmoment, das nach (8) und (8′) mit der gegebenen Belastungsdichte $q(s)$ durch $\mu''(s) = -q(s)$ mit $\mu(0) = 0$ und $\mu(l) = 0$ verknüpft ist. $f(s)$ ist offenbar die Durchbiegung des Balkens beim Fehlen der Kraft P.

Bevor wir uns im nächsten Paragraphen mit der näherungsweisen Auflösung dieser Integralgleichung beschäftigen, wollen wir hieraus noch kurz den Ausdruck für die sogenannte *Eulersche Knicklast* ableiten. Darunter versteht man in der Festigkeitslehre diejenige Belastung in der Längsrichtung eines Stabes, dessen beide Enden am seitlichen Ausbiegen verhindert sind, bei welcher der Stab ausknickt. Da hier keine seitlichen Kräfte einwirken, so erhalten wir diesen Fall aus unserer obigen Betrachtung, indem wir $q(s) \equiv 0$ setzen. Dann aber ist auch $\mu(s) \equiv 0$, und es wird aus (9) die homogene Gleichung

$$\bar{y}(s) = \frac{P}{EJ}\int_0^l K(s,t)\,\bar{y}(t)\,dt, \tag{10}$$

wenn P die in der Längsrichtung des Stabes wirkende Kraft ist. Für kleine Werte von P hat (10) nur die Lösung $\bar{y}(s) \equiv 0$, d. h. der Stab bleibt in seiner geraden Lage. Wenn wir aber P wachsen lassen, so ist zum ersten Male eine nicht identisch verschwindende Lösung möglich, wenn P/EJ gleich dem ersten Eigenwerte von $K(s,t)$ wird; d. h. bei dieser speziellen Belastung kann der Stab seitlich ausknicken. Nun sind uns aber die Eigenwerte dieses Kernes (7) bekannt (vgl. S. 18); es ist nämlich allgemein $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, wie man überdies sofort direkt aus der Relation (8) bestätigt, wenn dort $y(s) = \sin\frac{n\pi}{l}$ gesetzt wird. Die Eulersche Knicklast ergibt sich hiernach zu

$$P_E = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \tag{11}$$

in Übereinstimmung mit dem aus der Festigkeitslehre bekannten Werte.

§ 3. Über fortschreitende Näherung.

Mit der Aufstellung der Integralgleichung (9) haben wir das im vorigen Paragraphen gestellte Problem theoretisch gelöst: denn wir können hierauf ja die in Kap. II entwickelten Auflösungsformeln anwenden. Für die praktische Rechnung aber ist uns damit nicht sehr viel gedient; denn wir erhalten die Lösung in Form einer unendlichen Reihe. Deshalb wollen wir hier das in Kap. II. § 7, entwickelte Verfahren der sukzessiven Approximation benutzen, um uns für die gesuchte Durchbiegung einen brauchbaren Näherungs-

ausdruck zu verschaffen. Dort hatten wir die Lösung $\eta(s)$ der Integralgleichung

(1) $$f(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\eta(t)\,dt$$

durch eine Funktionsfolge $y_1(s), \dots y_n(s), \dots$ approximiert, indem wir

(2) $$y_1(s) = f(s); \quad y_n(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\, y_{n-1}(t)\,dt$$

setzten. Der Satz 2 (S. 90) besagt, daß die Fehlerfunktionen

(3) $$F_n(s) = \eta(s) - y_n(s)$$

bei $n \to \infty$ dann und nur dann gegen Null streben, wenn $|\lambda| < |\lambda_1|$ ist, wie wir zunächst annehmen wollen. Ferner hatten wir beim Beweise des dortigen Satzes 2 gesehen, daß die Entwicklungen

(4) $$F_n(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(n)} \varphi_\nu(s)$$

gelten, und es bestand zwischen den Fourierkoeffizienten zweier aufeinanderfolgender Fehlerfunktionen der Zusammenhang

(5) $$c_\nu^{(n+1)} = \frac{\lambda}{\lambda_\nu} c_\nu^{(n)}; \quad \text{also} \quad c_\nu^{(n+1)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)^n c_\nu^{(1)}.$$

Daraus ersehen wir, daß wegen des Anwachsens der Eigenwerte λ_ν der Einfluß der späteren Glieder viel rascher klein wird als der des ersten. Schon nach wenigen Schritten wird das erste Glied gegenüber den nachfolgenden weit überwiegen; d. h. die $F_n(s), F_{n+1}(s), \dots$ werden im wesentlichen so rasch klein wie die Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $\frac{\lambda}{\lambda_1}$. Dieser Quotient hat übrigens in dem Beispiele des vorigen Paragraphen noch eine einfache mechanische Bedeutung; es war $\lambda = \frac{P}{EJ}$, und der erste Eigenwert ergab die Eulersche Knicklast P_E (vgl. (11), § 2). Also ist

(6) $$\frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{P_E}{P}.$$

Läßt man nur solche Belastungen P zu, so daß z. B. $\frac{\lambda_1}{\lambda} \geqq 4$ bleibt, so bedeutet dies, daß erst das Vierfache der Belastung den gefährlichen Wert der Eulerschen Knicklast erreichen kann; man hat dann eine vierfache Sicherheit. Daher nennt man allgemein den Ausdruck (6) die *Knicksicherheit.*

Statt der Fehlerfunktionen selbst wollen wir das Integral der Fehlerquadrate betrachten. Es ist nach (4) und (5) mit Berücksichtigung der Orthogonalität und der Normiertheit der $\varphi_\nu(s)$

$$\int_a^b F_n{}^2(s)\,ds = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(1)^2} \frac{\lambda^{2n-2}}{\lambda_\nu{}^{2n-2}}, \tag{7}$$

und wir erhalten hieraus sogleich die Abschätzung

$$\int_a^b F_{n+1}^2(s)\,ds = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda_\nu^2} c_\nu^{(1)^2} \frac{\lambda^{2n-2}}{\lambda_\nu{}^{2n-2}} \leqq \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^2 \int_a^b F_n{}^2(s)\,ds. \tag{8}$$

Somit haben wir den

Satz 1: *Während die Fehlerfunktionen $F_1(s), F_2(s), \ldots$ nur im wesentlichen wie die Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $\frac{\lambda}{\lambda_1}$ zu Null abnehmen, bilden die Integrale* (7) *über die Fehlerquadrate eine Zahlenfolge, deren Elemente schneller klein werden als die einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^2$. Der Quotient $\frac{\lambda_1}{\lambda}$ hat in dem Beispiele des auf Knickung beanspruchten Balkens die Bedeutung der Knicksicherheit.*

Wir wollen die obigen Ausführungen auf einen konkreten Fall anwenden, bei welchem wir in der Lage sind, durch die Kenntnis der exakten Lösung die Güte des Approximationsverfahrens zahlenmäßig nachzuprüfen. Dazu wählen wir ein einfaches Beispiel zu dem Probleme eines auf Knickung und Biegung beanspruchten Balkens. Der Balken sei durch eine gleichmäßig verteilte Last von p_0 kg/cm belastet und werde außerdem durch eine zusammendrückende Kraft von P kg beansprucht (vgl. Fig. 7). Um die Integralgleichung (9), § 2, aufzustellen, müssen wir das von der vertikalen Belastung herrührende Biegungsmoment $\mu(s)$ ausrechnen. Die Auflagerkräfte sind

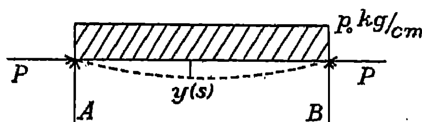


Fig. 7.

$$A = B = \frac{p_0 l}{2}$$

und also nach (2'), § 2,

$$\mu(s) = A s - \int_0^s q(\xi)(s-\xi)\,d\xi = \frac{p_0}{2}(l s - s^2).$$

Die in (9), § 2, auftretende Funktion $f(s)$ ist demnach, mit Rücksicht auf (7), § 2,

$$f(s)=\frac{p_0}{2EJ}\left\{\int_0^s\frac{t(l-s)}{l}(lt-t^2)\,dt+\int_s^l\frac{s(l-t)}{l}(lt-t^2)\,dt\right\}$$

$$=\frac{p_0}{2EJ}\left\{\int_0^s t^2(l-t)\,dt+s\int_s^l t(l-t)\,dt-\frac{s}{l}\int_0^l t^2(l-t)\,dt\right\}.$$

Rechnen wir diese einfachen Integrale aus, so ergibt sich

$$f(s)=\frac{p_0}{24EJ}[s^4-2ls^3+l^3s],$$

und die Integralgleichung für die Durchbiegung $y(s)$ lautet also in diesem Falle

$$y(s)=\frac{p_0}{24EJ}[s^4-2ls^3+l^3s]+\frac{P}{EJ}\int_0^l K(s,t)\,y(t)\,dt.$$

Die Näherungen $y_1(s), y_2(s), \ldots$ sind uns durch (2) gegeben. Danach ist

$$y_1(s)=f(s);\quad y_2(s)=f(s)+\frac{P}{EJ}\int_0^l K(s,t)f(t)\,dt;\quad \text{usw.}$$

Zur Berechnung von $y_2(s)$ erinnern wir uns an den Zusammenhang (8), § 2. Das gibt uns, wenn wir

$$\int_0^l K(s,t)f(t)\,dt=g(s)$$

setzen, $-f(s)=g''(s)$. Außerdem ist, wie man sofort durch Einsetzen von $K(s,t)$ sieht, $g(0)=g(l)=0$. Damit erhalten wir für $g(s)$ durch zweimaliges Integrieren des Ausdruckes für $f(s)$ den Wert

$$g(s)=\frac{-p_0}{24EJ}\left\{\frac{s^6}{30}-\frac{ls^5}{10}+\frac{l^3s^3}{6}-\frac{l^5s}{10}\right\}.$$

Setzen wir dies in den Ausdruck für $y_2(s)$ ein, so ergibt sich für die zweite Näherung

$$y_2(s)=\frac{p_0}{24EJ}\left\{s^4-2ls^3+l^3s-\frac{P}{EJ}\left(\frac{s^6}{30}-\frac{ls^5}{10}+\frac{l^3s^3}{6}-\frac{l^5s}{10}\right)\right\}.$$

Als P wollen wir den vierten Teil der Eulerschen Knicklast wählen, also $P=\frac{1}{4}\frac{\pi^2EJ}{l^2}$. Dann ist für die Stabmitte

$$y_2\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{p_0}{24EJ}\left\{\frac{5}{16}l^4+\frac{\pi^2\cdot 61\,l^4}{4\cdot 30\cdot 64}\right\}=\frac{p_0l^4}{EJ}\cdot 0{,}0163.$$

Andererseits können wir in diesem speziellen Falle leicht die Durch-

biegung $y(s)$ exakt ermitteln. Nach (6), § 2, genügt $y(s)$ der Differentialgleichung

$$y''(s) + \frac{P}{EJ} y(s) = -\frac{p_0}{EJ} \frac{s(l-s)}{2}$$

mit den Nebenbedingungen $y(0) = 0$ und $y(l) = 0$. Ein partikuläres Integral dieser inhomogenen Differentialgleichung ist, wie man leicht nachrechnet,

$$y^*(s) = -\frac{p_0 EJ}{P^2} - \frac{p_0 l}{2P} s + \frac{p_0}{2P} s^2.$$

Das allgemeine Integral der homogenen Gleichung können wir in der Form $C_1 \sin\sqrt{\frac{P}{EJ}}\, s + C_2 \sin\sqrt{\frac{P}{EJ}}\,(l-s)$ wählen und haben so als die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung

$$y(s) = -\frac{p_0 EJ}{P^2} - \frac{p_0}{2P} s(l-s) + C_1 \sin\sqrt{\frac{P}{EJ}}\, s + C_2 \sin\sqrt{\frac{P}{EJ}}\,(l-s).$$

Die Berücksichtigung der Nebenbedingung $y(0) = y(l) = 0$ liefert

$$C_1 = C_2 = \frac{p_0 EJ}{P^2} \frac{1}{\sin\sqrt{\frac{P}{EJ}}\, l}.$$

Demnach ist der genaue Wert der Durchbiegung in der Mitte des Stabes bei dem obigen Werte von P gegeben durch

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = -16 \frac{p_0 l^4}{\pi^4 EJ} - \frac{p_0 l^4}{2\pi^2 EJ} + 2 \frac{p_0 16 l^4}{\pi^4 EJ} \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{p_0 l^4}{EJ}\left\{-\frac{16}{\pi^4} - \frac{1}{2\pi^2} + \frac{16\sqrt{2}}{\pi^4}\right\} = \frac{p_0 l^4}{EJ} \cdot 0{,}0173.$$

Den angenäherten Wert hatten wir oben mit dem Faktor 0,0168 gefunden, also in sehr guter Übereinstimmung mit dem exakten Werte.

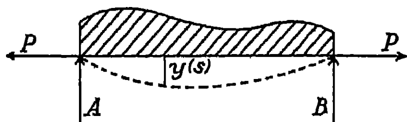


Fig. 8.

Neben dem bisher behandelten Probleme, bei welchem auf einen Balken außer einer vertikalen Belastung von $q(s)$ kg/cm noch eine zusammendrückende Kraft wirkt, soll noch der andere Fall betrachtet werden, daß die in Richtung des Stabes wirkende Kraft P diesen zu dehnen bestrebt ist (vgl. Fig. 8). Dann gelten offenbar die Überlegungen des § 2 hier genau ebenso, nur ist das dortige P durch $-P$ zu ersetzen. Es genügt also nach Satz 1, § 2, die gesuchte Durch-

biegung $y(s)$ hier der Integralgleichung

$$9) \qquad y(s) = f(s) - \frac{P}{EJ}\int_0^l K(s,t)y(t)\,dt,$$

wobei der Kern $K(s,t)$ wieder die Funktion (7), § 2, ist. Dieser Kern ist, wie wir wissen, positiv definit, seine Eigenwerte also positiv. Da in (9) der Parameter negativ ist, so hat (9) sicher eine Lösung; hier also brauchen wir nicht unterhalb der Eulerschen Knicklast zu bleiben. Wir bilden nun wieder die Näherungen $y_1(s) = f(s)$ und weiter nach (2)

$$y_n(s) = f(s) - \frac{P}{EJ}\int_0^l K(s,t)y_{n-1}(t)\,dt \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Die Fehlerfunktionen sind nach (3) und (11), S. 89,

$$F_1(s) = y(s) - f(s); \quad F_2(s) = -\frac{P}{EJ}\int_0^l K(s,t)F_1(t)\,dt;$$

$$F_3(s) = -\frac{P}{EJ}\int_0^l K(s,t)F_2(t)\,dt; \ldots$$

Nun ist, wenn stets $p(t) \geqq 0$ ist,

$$\int_0^l K(s,t)p(t)\,dt = \int_0^s \frac{t(l-s)}{l}p(t)\,dt + \int_s^l \frac{s(l-t)}{l}p(t)\,dt \geqq 0;$$

denn in beiden Integranden stehen nur positive Faktoren. Da $f(s)$, wie wir schon oben aus der Integralgleichung ablasen, die Durchbiegung des Balkens unter alleiniger Einwirkung der vertikalen Last ist und diese Durchbiegung durch die Zugkraft P verkleinert wird, so ist $y(s) < f(s)$ und also

$$F_1(s) < 0, \quad F_2(s) > 0, \quad F_3(s) < 0, \ldots$$

Demgegenüber sind in dem vorher behandelten Beispiele, bei welchem die Kraft P den Stab zusammenzudrücken strebt, alle Fehlerfunktionen positiv, wie man analog folgert. Mit anderen Worten: während dort die Lösung gleichsinnig durch die Näherungsfunktionen approximiert wird, so daß diese sämtlich kleiner als die Lösung bleiben, haben wir hier stets eine Überkorrektur; die $(n+1)$te Näherung weicht von der Lösung selbst in entgegengesetztem Sinne ab, wie die n-te Näherung es tut.

Trotz dieses Hin- und Herpendelns kommen wir mit dieser Approximationsmethode auch wieder nur dann zum Ziele, wenn $|\lambda| < \lambda_1$, d. h. hier $P < P_E$ ist; denn ein Blick auf (4) und (5) lehrt uns, daß für $|\lambda| \geqq \lambda_1$ mit wachsendem n die Fehlerfunktion $F_n(s)$ nicht gegen Null strebt. Aber in diesem Falle können wir durch eine gewisse Mittelbildung die Konvergenz des Approximationsverfahrens für beliebig große λ erreichen. Dabei benutzen wir keine spezielleren Eigenschaften des eben behandelten Beispiels; der Kernpunkt liegt vielmehr darin, daß alle $\lambda_\nu > 0$ sind, während der Parameter der Gleichung negativ ist. Deshalb legen wir für das folgende einen positiv definiten Kern $K(s, t)$ zugrunde und gehen von der Gleichung

$$\eta(s) = f(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \eta(t) dt \tag{10}$$

aus, in der also λ nun positiv ist.

Um uns ein System von Näherungen zu verschaffen, bilden wir zunächst folgende Funktionen

$$y_1(s) = f(s); \quad u_1(s) = f(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) y_1(t) dt;$$

$$z_1(s) = \alpha y_1(s) + \beta u_1(s).$$

Dabei sollen α und β zwei positive echte Brüche sein mit $\alpha + \beta = 1$. Als zweite Näherungsfunktion $y_2(s)$ nehmen wir $z_1(s)$ und fahren demgemäß fort:

$$y_2(s) = z_1(s); \quad u_2(s) = f(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) y_2(t) dt;$$

$$z_2(s) = \alpha y_2(s) + \beta u_2(s).$$

Das allgemeine Schema ist also

$$y_n(s) = z_{n-1}(s); \quad u_n(s) = f(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) y_n(t) dt; \tag{11}$$

$$z_n(s) = \alpha y_n(s) + \beta u_n(s).$$

Hierbei dürfen wir über α und β noch näher verfügen und können es dadurch erreichen, daß bei beliebigem $\lambda > 0$ die Näherungsfunktionen $y_n(s) \rightarrow \eta(s)$ streben. Die Fehlerfunktionen wollen wir je-

weils mit den entsprechenden großen Buchstaben bezeichnen, setzen also

(12) $$Y_n(s) = \eta(s) - y_n(s); \quad U_n(s) = \eta(s) - u_n(s);$$
$$Z_n(s) = \eta(s) - z_n(s).$$ Dann ist

$$Z_n(s) = \eta(s) - [\alpha(y_n(s) - \eta(s)) + \beta(u_n(s) - \eta(s))] - (\alpha + \beta)\eta(s),$$

also, wegen $\alpha + \beta = 1$,

(13) $$Z_n(s) = Y_{n+1}(s) = \alpha Y_n(s) + \beta U_n(s).$$

Als Erstes überlegen wir, daß die sämtlichen Fehlerfunktionen sich nach den Eigenfunktionen von $K(s, t)$ entwickeln lassen, mit anderen Worten, daß für jedes n die Darstellung

(14) $$Y_n(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(n)} \varphi_\nu(s) \quad \text{und} \quad U_n(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^{(n)} \varphi_\nu(s)$$

gilt. Für $U_n(s)$ ist das ohne weiteres einzusehen, da aus

$$U_n(s) = \eta(s) - f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) y_n(t) dt,$$

$$0 = \eta(s) - f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \eta(t) dt$$

durch Subtraktion für $U_n(s)$ die quellenmäßige Darstellung

(15) $$U_n(s) = -\lambda \int_a^b K(s, t)\, Y_n(t) dt$$

folgt. Ferner ist

$$Y_1(s) = \eta(s) - f(s) = -\lambda \int_a^b K(s, t) \eta(t) dt$$

als Kernintegral darstellbar, $Y_1(s)$ mithin entwickelbar. Dann gilt dasselbe aber wegen (13) auch von $Y_2(s)$ und für alle weiteren $Y_n(s)$, da auf der rechten Seite von (13) stets zwei Funktionen stehen, für welche einzeln die Entwickelbarkeit sukzessive folgt. Damit ist (14) bewiesen.

Aus (15) folgt, daß

$$d_\nu^{(n)} = -\lambda \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, Y_n(t)\, \varphi_\nu(s) dt\, ds = -\frac{\lambda}{\lambda_\nu} c_\nu^{(n)}$$

ist. Somit erhalten wir aus (18)

$$Y_{n+1}(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\alpha - \beta \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right) c_\nu^{(n)} \varphi_\nu(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \beta \frac{\lambda + \lambda_\nu}{\lambda_\nu}\right) c_\nu^{(n)} \varphi_\nu(s),$$

wobei wir für den letzten Ausdruck $\alpha = 1 - \beta$ benutzt haben. Wenn wir dies für $n = 1, 2, \ldots$ anwenden, so ergibt sich allgemein

$$Y_{n+1}(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \beta \frac{\lambda + \lambda_\nu}{\lambda_\nu}\right)^n c_\nu^{(1)} \varphi_\nu(s).$$

Unser Ziel ist erreicht, wenn wir β so wählen können, daß bei $n \to \infty$ gleichmäßig $Y_n(s) \to 0$ geht. Der in gewissem Sinne günstigste Fall ist $\beta = \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}$, da normalerweise die ersten Eigenfunktionen den Hauptteil des Fehlers liefern. Da aber λ_1 meist nur näherungsweise bekannt ist, wollen wir noch feststellen, daß wir den eben genannten Wert von β nicht notwendig zu nehmen brauchen, indem wir die äußerste Grenze für β ermitteln. Nun ist für hinreichend kleine positive β

$$(16) \qquad -(1-\beta) \leqq 1 - \beta \frac{\lambda + \lambda_\nu}{\lambda_\nu} \leqq 1 - \beta.$$

Es ist dann also

$$|Y_{n+1}(s)| < (1-\beta)^n \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu^{(1)} \varphi_\nu(s)| < (1-\beta)^n C,$$

wo C wegen der beim Schmidtschen Entwicklungssatz bewiesenen absoluten gleichmäßigen Konvergenz als endliche Konstante bestimmbar ist. Damit ist die gleichmäßige Konvergenz von $y_n(s) \to \eta(s)$ bewiesen, wenn β einen hinreichend kleinen positiven echten Bruch bedeutet. Wenn aber β sehr nahe bei Null liegt, so geht die Konvergenz sehr langsam. Um also einen günstigeren Fall zu haben, wählen wir β möglichst groß, doch so, daß noch (16) gilt. Dazu genügt es,

$$-(1-\beta) \leqq 1 - \beta \frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda_1}, \quad \text{d. h.} \quad \beta \leqq \frac{2\lambda_1}{\lambda + 2\lambda_1}$$

zu nehmen; denn dann ist für die größeren λ_ν die Bedingung (16) eo ipso erfüllt. Wenn wir nun auch den ersten Eigenwert λ_1 nicht genau kennen, so können wir ihn doch stets so gut abschätzen, daß wir ein brauchbares β erhalten. Wir sehen also, daß der oben genannte Wert $\frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}$ zwischen 0 und dieser äußersten Grenze $\frac{2\lambda_1}{\lambda + 2\lambda_1}$ liegt. Damit haben wir den

Satz 2: *Ist $K(s, t)$ ein positiv definiter Kern, so läßt sich die Lösung der Gleichung*

$$\eta(s) = f(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\eta(t)\,dt$$

für beliebiges positives λ durch folgendes Approximationsverfahren ermitteln: Man bilde mit $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$

$$y_1(s) = f(s); \quad u_1(s) = f(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) y_1(t)\,dt;$$

$$z_1(s) = \alpha y_1(s) + \beta u_1(s);$$

$$y_2(s) = z_1(s); \quad u_2(s) = f(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) y_2(t)\,dt;$$

$$z_2(s)_2 = \alpha y_2(s) + \beta u_2(s); \quad \textit{usw.}$$

Dann strebt bei $n \to \infty$ gleichmäßig $y_n(s) \to \eta(s)$, wenn

(17) $$\beta \leqq \frac{2\lambda_1}{\lambda + 2\lambda_1} \qquad \textit{gewählt wird.}$$

Wir wollen nun noch sehen, wie wir auch bei der homogenen Gleichung

(18) $$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

durch sukzessive Approximation zum Ziele kommen können. Hierbei ist zu beachten, daß nicht nur die Lösung $\varphi(s)$, sondern auch der Parameterwert λ noch unbekannt ist. Da wir die Lösung von (18) stets als normiert voraussetzen, sollen auch die Näherungsfunktionen $y_1(s), y_2(s), \ldots$ sämtlich der Bedingung

(19) $$\int_a^b y_n^2(s)\,ds = 1$$

unterworfen sein. Als erste Näherung setzen wir $y_1(s) = c = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$. Um $y_2(s)$ zu erhalten, bilden wir zunächst

$$\eta_2(s) = \int_a^b K(s, t)\,y_1(t)\,dt$$

und setzen dann mit Rücksicht auf (19)

$$y_2(s) = \frac{\eta_2(s)}{\sqrt{\int\limits_a^b \eta_2^2(s)\,ds}}, \qquad \text{und so allgemein}$$

(20) $$\eta_n(s) = \int\limits_a^b K(s,t)\,y_{n-1}(t)\,dt \text{ und } y_n(s) = \frac{\eta_n(s)}{\sqrt{\int\limits_a^b \eta_n^2(s)\,ds}} = c_n\eta_n(s),$$

wobei die Bedeutung der c_n aus der letzten Gleichung abzulesen ist. Wenn nun mit wachsendem n die Funktionsfolge $y_n(s) \to y(s)$ und die Zahlenfolge $c_n \to c$ konvergiert, so wird (18) durch $\varphi(s) = y(s)$ mit $\lambda = c$ befriedigt; denn nach (20) ist ja

$$y(s) = \lim_{n\to\infty} y_n(s) = \lim_{n\to\infty} c_n\eta_n(s) = \lim_{n\to\infty} c_n \int\limits_a^b K(s,t)\,y_{n-1}(t)\,dt$$
$$= c\int\limits_a^b K(s,t)\,y(t)\,dt.$$

Daß die Grenzwerte der Näherungsfunktionen $y_n(s)$ und der Zahlen c_n stets existieren, läßt sich beweisen, indem man $\eta_2(s)$ in die Fourier-Reihe entwickelt, was nach dem Entwicklungssatze stets möglich ist. Vergleicht man dann analog wie oben die Fourierkoeffizienten aufeinanderfolgender Näherungen, so sieht man, daß das Ganze eine Eigenfunktion ergibt, sogar in dem allgemeineren Falle, daß man als erste Näherungsfunktion $y_1(s)$ eine beliebige normierte Funktion wählt. Doch wollen wir das hier nicht im einzelnen durchführen, sondern verweisen dafür auf die Arbeit von *O. D. Kellogg*, On the existence and closure of sets of characteristic functions (*Math. Ann.*, Bd. 86 (1922)).

Hier wollen wir das Verfahren nur an einem einfachen Beispiele prüfen. Wählen wir als Kern $K(s,t) = s + t$ und als Grundintervall $0 \ldots 1$, so haben wir

$$y_1(s) = 1; \quad \eta_2(s) = \int\limits_0^1 (s+t)\cdot 1\,dt = s + \frac{1}{2}; \quad y_2(s) = \sqrt{\frac{12}{13}}\left(s + \frac{1}{2}\right);$$

$$\eta_3(s) = \int\limits_0^1 (s+t)\cdot\sqrt{\frac{12}{13}}\left(t+\frac{1}{2}\right)dt = \sqrt{\frac{12}{13}}\,s + \frac{7}{\sqrt{12\cdot 13}};$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{12\cdot 13}{181}};$$

$$y_3(s) = c_3\eta_3(s) = \frac{12}{\sqrt{181}}\,s + \frac{7}{\sqrt{181}}.$$

Hiermit wollen wir abbrechen und die so erhaltenen Näherungen mit den uns in diesem Falle bekannten wahren Werten vergleichen. Der vorliegende Kern $s+t$ hat, wie wir S. 52 ausgerechnet haben, die Eigenwerte $\lambda_1 = 4\sqrt{3} - 6$ und $\lambda_2 = -4\sqrt{3} - 6$. Da die c_n hier positiv sind, kommt als Vergleichswert nur λ_1 in Frage; es ist $\lambda_1 = 4\sqrt{3} - 6 = 0{,}9282$. Andererseits ist $c_3 = \sqrt{\frac{12 \cdot 13}{181}} = 0{,}9284$; wir haben also schon eine sehr gute Approximation des Eigenwertes. Die zugehörige Eigenfunktion haben wir S. 52 berechnet zu

$$\varphi_1(s) = \frac{\sqrt{3}s + 1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 0{,}8966 s + 0{,}518.$$

Die hier erhaltene Näherungsfunktion $y_3(s)$ hat den Wert

$$y_3(s) = \frac{12}{\sqrt{181}} s + \frac{7}{\sqrt{181}} = 0{,}892 s + 0{,}520$$

und stimmt also auch schon sehr gut mit dem wahren Werte überein. Es macht keine Schwierigkeit, noch die nächsten Näherungen auszurechnen; man wird sehen, daß die Genauigkeit der Übereinstimmung schnell zunimmt.

In dem besonders einfachen Falle $K(s,t) = st$ erreicht man, wie dem Leser zur Nachprüfung überlassen sei, schon bei der zweiten Näherung die exakten Werte des Eigenwertes und der Eigenfunktion.

Als letztes Beispiel sei der Kern

$$K(s,t) = \begin{cases} s(1-t) & \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq t, \\ t(1-s) & \text{für} \quad t \leqq s \leqq 1 \end{cases}$$

mit dem Grundintervalle $0 \dots 1$ zur Durchrechnung empfohlen. Geht man hier nach dem obigen Verfahren vor, so erhält man, wie wir hier nur angeben wollen,

$$y_1(s) = 1; \quad \eta_2(s) = \frac{1}{2}(s - s^2); \quad c_2 = \sqrt{120};$$

$$y_2(s) = \sqrt{30}(s - s^2); \quad \eta_3(s) = \frac{\sqrt{30}}{12}(s - 2s^3 + s^4); \quad c_3 = 9{,}877;$$

$$y_3(s) = \sqrt{20{,}32}(s - 2s^3 + s^4) = 4{,}50 s - 9{,}0 s^3 + 4{,}5 s^4.$$

Für diesen Kern ist, wie wir S. 13 festgestellt haben, $\lambda_1 = \pi^2 = 9{,}870$; es stimmt also schon c_3 sehr gut mit λ_1 überein. Die Approximation der Funktion $y_3(s)$ für $\varphi_1(s) = \sqrt{2}\sin \pi s$ ist in Anbetracht dessen, daß $y_1(s) = 1$ eine recht ungünstige Näherung ist, schon als sehr befriedigend anzusehen; denn es ist, wenn wir $\varphi_1(s)$ entwickeln,

$$\varphi_1(s) = \sqrt{2}\sin \pi s = 4{,}44 s - 7{,}31 s^3 \pm \cdots.$$

§ 4. Sturm-Liouvillesche Differentialgleichungen.

Bei den in den letzten Paragraphen behandelten Beispielen haben wir gesehen, wie Aufgaben, die in der üblichen Behandlungsweise der theoretischen Physik auf Differentialgleichungen führen, in einem engen Zusammenhange mit gewissen Integralgleichungen stehen. Bei der Aufstellung der Differentialgleichung wird naturgemäß nur die nächste Umgebung einer beliebig herausgegriffenen Stelle berücksichtigt; infolgedessen bedürfen die Randbedingungen jeweils einer besonderen Formulierung. Die Integralgleichung dagegen enthält eine Summation über das ganze Grundgebiet und umfaßt infolgedessen auch die Randbedingungen mit. Eine Abänderung derselben (bei gleichbleibendem Grundprobleme) wirkt sich in einer Abänderung des Kernes aus; wir erhalten dann also eine neue Integralgleichung, während die Differentialgleichung als solche davon unberührt bleibt. Zu einer Integralgleichung wird man, wie unsere Beispiele bestätigen, immer dann leicht kommen, wenn sich das Gesetz der Superposition anwenden läßt; und das ist dann möglich, wenn der physikalische Vorgang durch eine lineare Differentialgleichung beschrieben wird. Deshalb wollen wir in diesem Paragraphen noch den Zusammenhang einer gewissen Klasse von linearen Differentialgleichungen mit den Integralgleichungen etwas näher untersuchen.

Wir greifen nochmals auf die Überlegungen bei dem Probleme der Wärmeleitung zu Anfang von § 1 zurück und verallgemeinern, indem wir die Leitfähigkeiten k und h, die spezifische Wärme c und die Dichte ϱ als von Ort zu Ort veränderlich annehmen. Setzen wir $k = k(s)$, $h = h(s)$ und $c\varrho = g(s)$, so führt dieselbe Betrachtung wie dort zu der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(k(s)\,\frac{\partial\vartheta(s,\tau)}{\partial s}\right) - h(s)\vartheta(s,\tau) = g(s)\,\frac{\partial\vartheta(s,\tau)}{\partial\tau}. \tag{1}$$

Machen wir auch hier wieder den Ansatz

$$\vartheta(s,\tau) = e^{-\lambda\tau}\psi(s), \tag{2}$$

so genügt $\psi(s)$ der Gleichung

$$\frac{d}{ds}\left(k(s)\frac{d\psi(s)}{ds}\right) + (\lambda g(s) - h(s))\,\psi(s) = 0. \tag{3}$$

Diese Differentialgleichung, auf die uns das allgemeinere Problem der linearen Wärmeleitung führt, ist der Repräsentant einer wichtigen Klasse von Differentialgleichungen, mit der wir uns jetzt beschäftigen wollen.

Def.: Jede homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(4)\qquad k(s)\psi''(s)+k'(s)\psi'(s)+(\lambda g(s)-h(s))\psi(s)=0,$$

wo also der Koeffizient von $\psi'(s)$ gleich der Ableitung des Koeffizienten von $\psi''(s)$ ist und wo $k(s)$ und $g(s)$ in dem Grundintervalle positive und stetige Funktionen sind, heißt eine Sturm-Liouvillesche Differentialgleichung.[1]) Die Konstante λ nennen wir den Parameter der Differentialgleichung.

Neben der homogenen Gleichung (3) bzw. (4) betrachten wir noch die inhomogene Sturm-Liouvillesche Differentialgleichung

$$(5)\qquad \frac{d}{ds}(k(s)\psi'(s))+(\lambda g(s)-h(s))\psi(s)=q(s).$$

Da es sich bei (4) und (5) um Differentialgleichungen zweiter Ordnung handelt, muß die Lösung, wenn sie eindeutig bestimmt sein soll, noch zwei Nebenbedingungen genügen. Wir wollen nun wieder ein beliebiges Grundintervall $a \leqq s \leqq b$ gegeben denken und beschränken uns bei der Festlegung jener Nebenbedingungen auf den für die physikalischen Anwendungen im Vordergrunde stehenden Fall linearer und homogener Randbedingungen; d. h. wir fordern von der Lösung der Gleichung (4) bzw. (5) noch, daß sie den Bedingungsgleichungen

$$(6)\qquad \begin{cases} A_1\psi(a)+A_2\psi'(a)+A_3\psi(b)+A_4\psi'(b)=0, \\ B_1\psi(a)+B_2\psi'(a)+B_3\psi(b)+B_4\psi'(b)=0 \end{cases}$$

genügen sollen. Darin sind die physikalisch interessierenden Randbedingungen als Spezialfälle enthalten. Z. B. bedeutet $A_1 = B_3 = 1$, alle anderen Koeffizienten $= 0$, bei der Saite, daß die Enden festgehalten sind, bei der Wärmeleitung im Stabe, daß die Enden auf der konstanten Temperatur 0 gehalten werden; $A_3 = A_4 = 0$, $B_1 = B_2 = 0$ bedeutet bei der Saite, daß die Enden elastisch befestigt sind, bei der Wärmeleitung im Stabe, daß die Stabenden Wärme ausstrahlen usw. Setzen wir noch zur Abkürzung

$$(7)\qquad L[\psi]=k(s)\psi''(s)+k'(s)\psi'(s)-h(s)\psi(s),$$

so handelt es sich also darum, die homogene Gleichung

$$(8)\qquad L[\psi]+\lambda g(s)\psi(s)=0,$$

1) Der Name erklärt sich dadurch, daß Sturm und Liouville in berühmt gewordenen Arbeiten (*Journal de math.*, Bd. 1, 2, 3 (1836—1838)) zuerst diese Differentialgleichungen systematisch untersucht haben.

oder die inhomogene

(9) $$L[\psi] + \lambda g(s)\psi(s) = q(s),$$

beide Male mit den Randbedingungen (6), zu lösen.

Dem Differentialausdrucke (7) wollen wir eine Funktion $G(s, t)$ nach folgender Definition zuordnen:

Def.: $G(s, t)$ sei eine Funktion, welche bei festgehaltenem t stetig ist und der Differentialgleichung

$$L[G] = \frac{d}{ds}(k(s)G'(s, t)) - h(s)G(s, t) = 0$$

mit den Randbedingungen (6) genügt und die Eigenschaft hat, daß die erste Ableitung nach s an der Stelle t einen Sprung aufweist, so daß

(10) $$\left(\frac{\partial G(s, t)}{\partial s}\right)_{s=t-0} - \left(\frac{\partial G(s, t)}{\partial s}\right)_{s=t+0} = \frac{1}{k(t)}$$

ist. $G(s, t)$ heißt die dem Differentialausdrucke (7) mit den Randbedingungen (6) zugeordnete „Greensche Funktion".

Der Name *Greensche Funktion* rührt daher, daß Green als erster den hier zugrunde liegenden Gedanken bei der Behandlung der Randwertaufgabe der Potentialtheorie angewandt hat.

Zur Vereinfachung der Rechnung wollen wir uns hier auf den speziellen Fall der Randbedingungen

(6′) $$\psi(a) = 0; \quad \psi(b) = 0$$

beschränken. Bevor wir sehen, was wir mit der soeben eingeführten Greenschen Funktion anfangen können, wollen wir uns überlegen, wie wir sie uns verschaffen können. Es seien $u(s)$ und $v(s)$ irgendwelche partikulären Lösungen von $L[\psi] = 0$; dann gelten also die beiden Gleichungen

$$k(s)u''(s) + k'(s)u'(s) - h(s)u(s) = 0,$$
$$k(s)v''(s) + k'(s)v'(s) - h(s)v(s) = 0.$$

Multiplizieren wir die erste mit $v(s)$, die zweite mit $u(s)$, so folgt durch Subtraktion

$$k(s)\{u''(s)v(s) - v''(s)u(s)\} + k'(s)\{u'(s)v(s) - v'(s)u(s)\} = 0,$$

oder, da die erste Klammer identisch mit der Ableitung des Ausdruckes $u'(s)v(s) - v'(s)u(s)$ ist,

$$\frac{d}{ds}(k(s)\{u'(s)v(s) - v'(s)u(s)\}) = 0.$$

Es ist also stets

(11) $k(s)\Delta(s) = \text{const.}$ mit (11′) $\Delta(s) = u'(s)v(s) - v'(s)u(s)$.

Wählen wir nun $u(s)$ und $v(s)$ noch so, daß $u(a) = 0$ und $v(b) = 0$ ist, so behaupten wir, daß die Funktion

$$G(s,t) = \begin{cases} \dfrac{u(s)v(t)}{k(s)\Delta(s)} & \text{für} \quad a \leqq s \leqq t, \\ \dfrac{v(s)u(t)}{k(s)\Delta(s)} & \text{für} \quad t \leqq s \leqq b \end{cases} \tag{12}$$

den Bedingungen der oben gegebenen Definition gerecht wird, also die zugeordnete Greensche Funktion ist. In der Tat ist, wenn wir im folgenden bei der Differentiation stets (11) beachten,

$$\left(\frac{\partial G(s,t)}{\partial s}\right)_{s=t-0} - \left(\frac{\partial G(s,t)}{\partial s}\right)_{s=t+0} = \frac{u'(t)v(t) - v'(t)u(t)}{k(t)\Delta(t)} = \frac{1}{k(t)}.$$

Ferner genügt bei festem t die Funktion $G(s,t)$ der Gleichung $L[\psi] = 0$, und es ist $G(a,t) = 0$ und $G(b,t) = 0$. Nach demselben Verfahren, wie es auf S. 7 durchgeführt wurde, erkennen wir, daß

$$G(s,t) = G(t,s) \tag{12′}$$

ist; die Greensche Funktion ist also in s und t symmetrisch. (Nebenbei sei bemerkt, daß diese Symmetrieeigenschaft bei beliebigen Randbedingungen (6) nicht immer erfüllt ist.)

Wir wollen die eben angegebene Konstruktion von $G(s,t)$ in dem einfachsten Falle durchführen. Es sei $k(s) = 1$, $h(s) = 0$ und das Intervall $0 \ldots l$ gegeben; dann reduziert sich der Differentialausdruck $L[\psi]$ auf $\psi''(s)$. Um $G(s,t)$ zu konstruieren, haben wir zwei Lösungen $u(s)$ und $v(s)$ von $\psi''(s) = 0$ mit $u(0) = 0$ und $v(l) = 0$ zu wählen. Dafür können wir $u(s) = s$ und $v(s) = (l - s)$ nehmen. Dann ist $\Delta(s) = u'(s)v(s) - v'(s)u(s) = l$. Es ist also nach (12) in diesem Falle

$$G(s,t) = \begin{cases} \dfrac{u(s)v(t)}{k(s)\Delta(s)} = \dfrac{s(l-t)}{l} & \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq t, \\ \dfrac{v(s)u(t)}{k(s)\Delta(s)} = \dfrac{t(l-s)}{l} & \text{für} \quad t \leqq s \leqq l. \end{cases}$$

D. h. zu dem einfachsten Sturm-Liouvilleschen Differentialausdrucke gehört als Greensche Funktion gerade der Kern, auf den wir schon in den früher behandelten Beispielen mehrfach gestoßen sind. Nun wissen wir (vgl. z. B. S. 115), daß für diese Greensche Funktion die Beziehung gilt

$$\psi(s) = -\int_0^l G(s,t)\psi''(t)\,dt,$$

wenn $\psi(0) = 0$ und $\psi(l) = 0$ ist. Anders ausgedrückt: In diesem Spezialfalle ist die Lösung der Differentialgleichung $L[\eta] = q(s)$ mit den Randbedingungen $\eta(0) = \eta(l) = 0$ durch

$$\eta(s) = -\int_0^l G(s, t) q(t)\, dt$$

gegeben. Es sei nun allgemein die Differentialgleichung

$$L[\eta] = q(s) \tag{13}$$

mit den Randbedingungen $\eta(a) = \eta(b) = 0$ vorgelegt. Dann werden wir entsprechend dem eben Gesagten vermuten, daß auch hier die Lösung durch

$$\eta(s) = -\int_a^b G(s, t) q(t)\, dt \tag{14}$$

gegeben ist. Daß dies richtig ist, beweisen wir direkt durch Differenzieren; es ist

$$-\eta(s) = \int_a^s G(s, t) q(t)\, dt + \int_s^b G(s, t) q(t)\, dt \qquad \text{und also}$$

$$-\eta'(s) = \int_a^s G'(s, t) q(t)\, dt + \int_s^b G'(s, t) q(t)\, dt, \tag{15}$$

da wegen der Stetigkeit von $G(s, t)$ sich die beiden von der oberen bzw. unteren Grenze herrührenden Bestandteile gegenseitig aufheben. Der Akzent bedeutet die Ableitung nach s. Nochmalige Differentiation liefert

$$-\eta''(s) = \int_a^s G''(s, t) q(t)\, dt + \int_s^b G''(s,t) q(t)\, dt + q(s) \{G_1'(s,s) - G_2'(s, s)\},$$

wo wir mit G_1 bzw. G_2 den Wert der Greenschen Funktion in dem ersten bzw. in dem zweiten Teilintervalle bezeichnen. Bei $G'_1(s, t)$ ist die erste Variable stets größer als die zweite, bei $G'_2(s, t)$ ist es umgekehrt, so daß

$$G_1'(s, s) = \left(\frac{\partial G(\sigma, s)}{\partial \sigma}\right)_{\sigma = s+0}; \quad G_2'(s, s) = \left(\frac{\partial G(\sigma, s)}{\partial \sigma}\right)_{\sigma = s-0}$$

zu setzen ist. Wir bekommen also mit Rücksicht auf (10)

$$\eta''(s) = -\int_a^b G''(s, t) q(t)\, dt + q(s) \frac{1}{k(s)}. \tag{16}$$

Aus (14), (15), (16) erhalten wir

$$k(s)\eta''(s)+k'(s)\eta'(s)-h(s)\eta(s)$$
$$=q(s)-\int_a^{s-0}\{k(s)G''(s,t)+k'(s)G'(s,t)-h(s)G(s,t)\}\,q(t)\,dt$$
$$-\int_{s+0}^{b}\{k(s)G''(s,t)+k'(s)G'(s,t)-h(s)G(s,t)\}\,q(t)\,dt.$$

Links steht $L[\eta]$ und rechts verschwindet das Integral, weil der Faktor von $q(t)$ gerade $L[G]$ ist; $L[G]$ aber ist für alle $t \neq s$ Null, also auch das Integral. Damit ist bewiesen, daß die durch (14) definierte Funktion der Gleichung (13) genügt. Es ist aber auch $\eta(a)=\eta(b)=0$ wegen $G(0,t)=0$ und $G(l,t)=0$.

Satz 1: *Die Differentialgleichung*

(13) $$\frac{d}{ds}(k(s)\eta'(s))-h(s)\eta(s)=q(s)$$

mit den Randbedingungen $\eta(a)=\eta(b)=0$ *wird durch*

(14) $$\eta(s)=-\int_a^b G(s,t)\,q(t)\,dt$$

gelöst, wenn $G(s,t)$ *die oben definierte Greensche Funktion zu dem Differentialausdruck* $L[\psi]$ *mit diesen Randbedingungen ist.*

Um nun das allgemeine Problem zu lösen, schreiben wir (9) in der Form

$$L[\psi]=q(s)-\lambda g(s)\psi(s).$$

Wenden wir hierauf den Satz 1 an, so bleibt alles wie dort, nur ist $q(t)$ durch $q(t)-\lambda g(t)\psi(t)$ zu ersetzen, und wir erhalten

$$\psi(s)=-\int_a^b G(s,t)\{q(t)-\lambda g(t)\psi(t)\}\,dt.$$

Wir kommen auch hier wieder auf eine Integralgleichung mit symmetrischem Kerne, wenn wir ähnlich wie schon in dem Beispiele der inhomogenen Saite verfahren. Multiplizieren wir nämlich die letzte Gleichung mit $\sqrt{g(s)}$ — damit bleiben wir wegen der Voraussetzung $g(s)>0$ im Reellen — und setzen $\sqrt{g(s)}\,\psi(s)=\eta(s)$, so haben wir

$$\eta(s)=\lambda\int_a^b \sqrt{g(s)}\sqrt{g(t)}\,G(s,t)\cdot\eta(t)\,dt-\sqrt{g(s)}\int_a^b G(s,t)\,q(t)\,dt$$

und damit den

Satz 2: *Ist die Differentialgleichung (9) mit den Randbedingungen $\psi(a) = \psi(b) = 0$ vorgelegt und ist $G(s, t)$ die zugehörige Greensche Funktion, so ist deren Integration äquivalent mit der Auflösung der Integralgleichung*

$$f(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b \sqrt{g(s)}\sqrt{g(t)}\, G(s, t)\eta(t)\, dt, \tag{17}$$

wo zur Abkürzung

$$f(s) = -\sqrt{g(s)} \int_a^b G(s, t) q(t)\, dt \tag{17'}$$

gesetzt ist. Der Kern der Integralgleichung (17) ist symmetrisch.

Die gesuchte Lösung $\psi(s)$ der Differentialgleichung ist dann gegeben durch

$$\psi(s) = \frac{\eta(s)}{\sqrt{g(s)}}. \tag{18}$$

Ziehen wir die Ergebnisse der Schmidtschen Theorie über symmetrische Kerne heran, so können wir aus diesem Satze ohne weiteres folgendes über die Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichungen aussagen:

Satz 3: *Die homogene Gleichung*

$$L[\psi] + \lambda g(s)\psi(s) = 0 \tag{19}$$

hat i. a. keine Lösung, sondern nur für diejenigen Parameterwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, die Eigenwerte des Kernes

$$K(s, t) = \sqrt{g(s)}\sqrt{g(t)}\, G(s, t)$$

sind. Diese heißen daher auch die Eigenwerte der Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung (19) und die zugehörigen Lösungen $\psi_1(s)$, $\psi_2(s), \ldots$ die Sturm-Liouvilleschen Funktionen. Sie sind nach Satz 2 bis auf den Faktor $\sqrt{g(s)}$ mit den Eigenfunktionen $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s), \ldots$ dieses Kernes $K(s, t)$ identisch. Die inhomogene Gleichung

$$L[\psi] + \lambda g(s)\psi(s) = q(s) \tag{20}$$

hat für alle $\lambda \neq \lambda_\varkappa$ eine und nur eine Lösung. Ist $\lambda = \lambda_\varkappa$ speziell ein Eigenwert, so hat (20) dann und nur dann eine Lösung, wenn $q(s)$ die Relation

$$\int_a^b q(s)\psi_\varkappa(s)\, ds = 0 \tag{21}$$

erfüllt, d. h. wenn die zu $\lambda_\varkappa$ gehörige Eigenfunktion und $q(s)$ orthogonal sind.

Der letzte Teil dieses Satzes folgt sofort daraus, daß die Schmidtsche Theorie im Falle $\lambda = \lambda_\varkappa$ als notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit von (17), d. h. also von (20),

$$\int_a f(s)\,\varphi_\varkappa(s)\,ds = 0$$

verlangt, wo $f(s)$ die Bedeutung (17') hat. Setzen wir dies für $f(s)$ ein, so folgt

$$0 = \int_a^b \sqrt{g(s)} \int_a^b G(s,t)\,q(t)\,dt \cdot \varphi_\varkappa(s)\,ds$$

$$= \int_a^b\int_a^b \sqrt{g(s)}\,\sqrt{g(t)}\,G(s,t)\,\varphi_\varkappa(s)\,\frac{q(t)}{\sqrt{g(t)}}\,ds\,dt.$$

Wenn wir die Integration nach s ausführen, so ergibt sich wegen der Symmetrie von $G(s, t)$

$$0 = \frac{1}{\lambda_\varkappa}\int_a^b \frac{\varphi_\varkappa(t)}{\sqrt{g(t)}}\,q(t)\,dt,$$

was genau (21) ist.

Wir haben diese Überlegungen für den Spezialfall $\psi(a) = \psi(b) = 0$ durchgeführt; sie gelten genau ebenso auch noch für allgemeinere Randbedingungen der Form (6), z. B. für die S. 130 genannten, physikalisch besonders wichtigen Fälle. Bei beliebigen Randbedingungen der Form (6) allerdings ist i. a. $G(s, t)$ nicht mehr in s und t symmetrisch.

Der Schmidtsche Entwicklungssatz besagt in diesem Zusammenhange: Jede Funktion, die sich mittels der Greenschen Funktion $G(s, t)$ quellenmäßig darstellen läßt, läßt sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen der zugrunde liegenden Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung entwickeln. Die allgemeine Bedingung der quellenmäßigen Darstellung können wir bei diesen speziellen Verhältnissen durch eine bequemer zu übersehende Bedingung ersetzen. Ist nämlich $F(s)$ eine Funktion, die den Randbedingungen genügt und die für $a \leqq s \leqq b$ nebst ihrer ersten Ableitung stetig ist, während ihre zweite Ableitung wenigstens stückweise in $a \ldots b$ stetig ist, so können wir

$$L[F(s)] = -q(s)$$

bilden. Nach Satz 1 aber ist dann

$$F(s) = \int_a^b G(s, t) q(t) dt,$$

d. h. $F(s)$ quellenmäßig darstellbar. Schreiben wir die letzte Gleichung in dieser Form:

$$\sqrt{g(s)} F(s) = \int_a^b \sqrt{g(s)} \sqrt{g(t)} G(s, t) \frac{q(t)}{\sqrt{g(t)}} dt,$$

so folgt aus dem Schmidtschen Entwicklungssatze

$$\sqrt{g(s)} F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \varphi_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sqrt{g(s)} \psi_n(s) .$$

Dabei ist
$$\gamma_n = \int_a^b F(s) \sqrt{g(s)} \varphi_n(s) ds,$$

und wir erhalten den

Satz 4: *Jede nebst ihrer ersten Ableitung für $a \leqq s \leqq b$ stetige Funktion $F(s)$, welche die Randbedingungen* (6) *befriedigt und deren zweite Ableitung in $a \ldots b$ quadratisch integrabel ist, gestattet die gleichmäßig konvergente Entwicklung*

(22)
$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \psi_n(s)$$

nach den Eigenfunktionen irgendeiner Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung mit denselben Randbedingungen, sofern sie eine Greensche Funktion besitzt. Die Koeffizienten γ_n sind dabei gegeben durch

(22′)
$$\gamma_n = \int_a^b F(s) g(s) \psi_n(s) ds.$$

Dieser Entwicklungssatz ergibt sich hier als ein Spezialfall des allgemeinen Schmidtschen Entwicklungssatzes nach Orthogonalfunktionen eines symmetrischen Kernes. Die dort gemachte allgemeine Voraussetzung der quellenmäßigen Darstellung konnten wir bei der hier vorliegenden Untergruppe durch eine speziellere ersetzen. Umgekehrt ist die Voraussetzung des Satzes 4 noch erheblich enger, als sie in einzelnen hierzu untergeordneten Fällen zu fordern sind, z. B. bei den gewöhnlichen Fourierschen Reihen.

Viertes Kapitel.

Unsymmetrische Kerne.

Nicht immer führen die Anwendungen auf eine Integralgleichung mit symmetrischem Kerne. So wird z. B. die Funktion $K(s, t)$, die in dem optischen Probleme Kap. I, § 6, auftritt, nur unter besonderen Umständen ein symmetrischer Kern sein. Auch die später (dieses Kapitel, § 5) zu behandelnden Randwertaufgaben der Potentialtheorie führen i. a. auf unsymmetrische Kerne. Wir müssen uns also noch überlegen, wie die Verhältnisse bei unsymmetrischen Kernen liegen. Im folgenden lassen wir deshalb zwar unsere früheren Voraussetzungen über Integrierbarkeit bestehen, es braucht aber nicht mehr die Symmetrieeigenschaft $K(s, t) = K(t, s)$ erfüllt zu sein. Die Hauptaufgabe wird es wieder sein, die Lösungsmöglichkeit der Gleichung

$$f(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\eta(t)\,dt \tag{1}$$

zu diskutieren. Dabei wird sich ein dem Falle symmetrischer Kerne analoges Resultat ergeben, daß nämlich (1) sicher dann eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, wenn die beiden homogenen Gleichungen

$$F(s) = \lambda \int_a^b K(t, s) F(t)\,dt \quad \text{und} \quad G(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) G(t)\,dt$$

keine eigentliche Lösung haben. Bei den symmetrischen Kernen sind diese beiden Gleichungen identisch. Hier aber müssen wir stets genau darauf achten, ob nach der ersten oder nach der zweiten Variabeln des Kernes zu integrieren ist. Infolge des Fortfalls der Symmetrie sind die uns aus der Theorie der symmetrischen Kerne bekannten Sätze über die Eigenfunktionen und die Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nicht ohne weiteres übertragbar. Wir müssen uns zunächst darüber orientieren, was überhaupt nun an Stelle der Eigenfunktionen tritt (§ 1) und welche Modifikation hier der Entwicklungssatz erfährt (§ 2). Nachdem wir dann den oben über die Lösbarkeit von (1) angegebenen Hauptsatz durch Zurückführung auf eine Gleichung mit symmetrischem Kerne bewiesen haben, werden wir zum Schluß an dem berühmten Beispiele der Randwertaufgaben der Potentialtheorie eine charakteristische Anwendungsmöglichkeit kennenlernen.

§ 1. Die Schmidtschen Eigenfunktionen.

Wollten wir bei einem unsymmetrischen Kerne analog wie bei den symmetrischen versuchen, durch die Lösungen der homogenen Gleichung

$$\varphi_n(s) = \lambda_n \int_a^b K(s, t)\, \varphi_n(t)\, dt \tag{1}$$

uns ein Funktionensystem $\{\varphi_n(s)\}$ zu verschaffen, so nutzt uns das nicht viel; denn die Haupteigenschaft der Orthogonalität wäre i. a. gar nicht erfüllt. Ist nämlich $\varphi_m(s)$ eine zweite derartige Funktion, die (1) mit λ_m statt λ_n befriedigt $(\lambda_m \neq \lambda_n)$, so können wir den aus Kap. II, § 1, bekannten Beweis für die Orthogonalität von $\varphi_m(s)$ und $\varphi_n(s)$ hier nicht durchführen, weil wir dort die Symmetrie des Kernes ganz wesentlich benutzt haben. Wir kommen aber wieder zu einem Orthogonalsysteme, wenn wir in (1) unter dem Integrale eine andere Funktion als die auf der linken Seite einführen, also etwa

$$\psi_n(s) = \lambda_n \int_a^b K(s, t)\, \chi_n(t)\, dt, \tag{1'}$$

und in geeigneter Weise eine zweite Beziehung zwischen $\psi_n(s)$ und $\chi_n(s)$ fordern. Wählen wir als diese

$$\chi_n(t) = \lambda_n \int_a^b K(\varrho, t)\, \psi_n(\varrho)\, d\varrho, \tag{1''}$$

so erkennen wir durch Einsetzen in (1'), daß $\psi_n(s)$ der Gleichung

$$\psi_n(s) = \lambda_n^2 \int_a^b \int_a^b K(s, t) K(\varrho, t)\, \psi_n(\varrho)\, d\varrho\, dt$$

genügt. Das ist aber eine homogene Gleichung für $\psi_n(s)$ mit einem symmetrischen Kerne, wie wir sofort erkennen, wenn wir zuerst nach t integrieren und

$$\int_a^b K(s, t) K(\varrho, t)\, dt = K_{\mathrm{I}}(s, \varrho)$$

setzen. Dieser Kern ist von λ_n unabhängig, d. h. die sämtlichen Funktionen $\psi_n(s)$ sind Eigenfunktionen des symmetrischen Kernes

$$K_{\mathrm{I}}(s, t) = \int_a^b K(s, \varrho) K(t, \varrho)\, d\varrho \tag{2a}$$

und bilden also ein Orthogonalsystem. Das Analoge gilt für die

Funktionen $\chi_n(s)$, wie man sofort sieht, wenn man in (1'') $\psi_n(\varrho)$ aus (1') einsetzt. Der symmetrische Kern, zu welchem die $\chi_n(s)$ Eigenfunktionen sind, ist aber ein anderer, nämlich

$$(2\text{b}) \qquad K_{\text{II}}(s,t) = \int_a^b K(\varrho, s) K(\varrho, t)\, d\varrho .$$

Mit der Bezeichnung $K_{\text{I}}(s,t)$ soll gleichzeitig angedeutet werden, daß bei der Integration in beiden Faktoren des Integranden die ersten Variabeln festgehalten werden; entsprechend bei $K_{\text{II}}(s,t)$ die zweiten Variabeln.

Die vorstehenden Betrachtungen haben uns schon gezeigt, daß jedesmal, wenn die Gleichungen (1') und (1'') gleichzeitig erfüllt sind, $\psi_n(s)$ und $\chi_n(s)$ Eigenfunktionen von den symmetrischen Kernen $K_{\text{I}}(s,t)$ bzw. $K_{\text{II}}(s,t)$ sind, und zwar gehören sie beide Male zu demselben Eigenwerte λ_n^2. Es sind aber noch zwei wichtige Fragen zu klären, nämlich erstens, ob die λ_n, für welche (1') und (1'') gleichzeitig befriedigt werden können, notwendigerweise sämtlich reell sind, und zweitens, wie wir das vollständige System dieser *Eigenwerte* λ_n mit den dazu gehörigen *Eigenfunktionen* $\psi_n(s)$, $\chi_n(s)$ ausfindig machen können. Zu diesem Zwecke beweisen wir von den beiden Kernen $K_{\text{I}}(s,t)$ und $K_{\text{II}}(s,t)$ zwei wichtige Eigenschaften. Als Erstes stellen wir fest, daß sie positiv definit sind. Ist nämlich $q(s)$ eine beliebige Funktion, die für $a \leqq s \leqq b$ quadratisch integrabel ist, so ist

$$\int_a^b \int_a^b K_{\text{I}}(s,t) q(s) q(t)\, ds\, dt \geqq 0;$$

denn wenn wir für $K_{\text{I}}(s,t)$ seinen Wert (2a) einsetzen, so haben wir

$$\int_a^b \int_a^b \int_a^b K(s,\varrho) K(t,\varrho) q(s) q(t)\, ds\, dt\, d\varrho = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(\omega,\varrho) q(\omega)\, d\omega \right\}^2 d\varrho \geqq 0.$$

Ebenso folgt, daß $K_{\text{II}}(s,t)$ ein positiv definiter Kern ist. Beide Kerne haben also nur positive Eigenwerte, und damit ist gezeigt, daß alle λ_n, für welche (1') und (1'') gleichzeitig befriedigt werden können, reell sind.

Die zweite Eigenschaft dieser Kerne besteht darin, daß sie beide dieselben Eigenwerte besitzen. Es sei nämlich μ_n ein Eigenwert von $K_{\text{I}}(s,t)$ und $\psi_n(s)$ die zugehörige Eigenfunktion, also

$$(3) \qquad \psi_n(s) = \mu_n \int_a^b K_{\text{I}}(s,t) \psi_n(t)\, dt.$$

$\psi_n(s)$ nehmen wir dabei, wie immer, als normiert an. Multiplizieren wir (3) mit $K(s, \sigma)$ und integrieren nach s, so erhalten wir, wenn wir für $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ seinen Wert einsetzen,

$$(4) \qquad \chi_n^*(\sigma) = \int_a^b K(s, \sigma)\psi_n(s)\,ds$$

$$= \mu_n \int_a^b\int_a^b\int_a^b K(s, \varrho)K(t, \varrho)K(s, \sigma)\psi_n(t)\,dt\,ds\,d\varrho.$$

Unter dem Integrale rechts aber steht, wenn wir die Integration nach t ausführen, gerade $\chi_n^*(\varrho)$; und wenn wir noch nach s integrieren, so steht in dem übrig bleibenden Integrale $K_{\mathrm{II}}(\sigma, \varrho)$. Es befriedigt also $\chi_n^*(\sigma)$ die Relation

$$\chi_n^*(\sigma) = \mu_n \int_a^b K_{\mathrm{II}}(\sigma, \varrho)\chi_n^*(\varrho)\,d\varrho,$$

und es kann nicht $\chi_n^*(\sigma) \equiv 0$ sein; denn dann ergäbe sich aus (4) ein Widerspruch. Es würde nämlich

$$0 \equiv \int_a^b \chi_n^*(\sigma)K(\omega, \sigma)\,d\sigma = \int_a^b\int_a^b K(s, \sigma)\psi_n(s)K(\omega, \sigma)\,ds\,d\sigma$$

folgen, und also, wenn wir in dem letzten Integrale zuerst nach σ integrieren,

$$0 \equiv \int_a^b K_{\mathrm{I}}(s, \omega)\psi_n(s)\,ds = \frac{\psi_n(\omega)}{\mu_n}.$$

Es ist somit $\chi_n^*(s)$ wirklich Eigenfunktion von $K_{\mathrm{II}}(s, t)$ und gehört ebenso wie $\psi_n(s)$ bei $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ zum Eigenwerte μ_n. Mit anderen Worten: Jeder Eigenwert von $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ ist auch ein solcher von $K_{\mathrm{II}}(s, t)$. Da wörtlich ebenso folgt, daß umgekehrt jeder Eigenwert von $K_{\mathrm{II}}(s, t)$ auch Eigenwert von $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ ist, so haben wir festgestellt, daß $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ und $K_{\mathrm{II}}(s, t)$ dieselben Eigenwerte $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, \ldots$ besitzen. Sie sind sämtlich positiv, da $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ und $K_{\mathrm{II}}(s, t)$ positiv definit sind. Wir dürfen also setzen

$$\mu_1 = \lambda_1^2, \quad \mu_2 = \lambda_2^2, \ldots \mu_n = \lambda_n^2, \ldots$$

Nun können wir auch die Frage nach dem vollständigen Lösungssysteme von (1′) und (1″) beantworten. Durch (4) haben wir jeder zu

μ_n gehörigen Eigenfunktion $\psi_n(s)$ von $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ eine solche von $K_{\mathrm{II}}(s, t)$ zugeordnet. Normieren wir diese, indem wir $\chi_n(s) = c\chi_n^*(s)$ setzen, so befriedigen $\psi_n(s)$ und $\chi_n(s)$, wie wir sogleich sehen werden, die Gleichungen (1′) und (1″). Den Faktor c finden wir aus der Bedingungsgleichung

$$\int_a^b c^2 \chi_n^{*2}(s)\, ds = 1.$$

Setzen wir für $\chi_n^*(s)$ den Wert aus (4) ein, so können wir die letzte Gleichung in der Form

$$c^2 \int_a^b\int_a^b\int_a^b K(r, s)\, \psi_n(r)\, K(\varrho, s)\, \psi_n(\varrho)\, dr\, d\varrho\, ds = 1$$

schreiben. Integrieren wir hier zuerst nach s, so erhalten wir mit Rücksicht auf (3)

$$1 = c^2 \int_a^b\int_a^b K_{\mathrm{I}}(r, \varrho)\, \psi_n(r)\, \psi_n(\varrho)\, d\varrho\, dr = \frac{c^2}{\mu_n} \int_a^b \psi_n^2(r)\, dr = \frac{c^2}{\mu_n}.$$

Es ist also $c^2 = \mu_n$, d. h. $c = \lambda_n$ zu setzen. Damit haben wir zunächst aus (4)

$$(4') \qquad \chi_n(s) = c\,\chi_n^*(s) = \lambda_n \int_a^b K(\varrho, s)\, \psi_n(\varrho)\, d\varrho.$$

Andererseits aber ist auch, wenn wir in (3) für $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ die Integraldarstellung (2a) einsetzen,

$$\psi_n(s) = \lambda_n^2 \int_a^b\int_a^b K(s, \varrho)\, K(t, \varrho)\, \psi_n(t)\, dt\, d\varrho,$$

oder, wenn wir zuerst nach t integrieren und (4′) beachten,

$$\psi_n(s) = \lambda_n \int_a^b K(s, \varrho)\, \chi_n(\varrho)\, d\varrho.$$

Es befriedigen also $\psi_n(s)$ und $\chi_n(s)$ (1′) und (1″). Da wir schon oben sahen, daß $\psi_n(s)$ und $\chi_n(s)$, wenn sie (1′) und (1″) genügen, auch stets umgekehrt Eigenfunktionen von $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ bzw. von $K_{\mathrm{II}}(s, t)$ sind, so bekommen wir auf diese Weise die sämtlichen Lösungen von (1′) und (1″). Es gilt also der

Satz 1: *Bildet man, von dem gegebenen Kerne $K(s, t)$ ausgehend, die beiden symmetrischen Kerne*

$$K_{\mathrm{I}}(s, t) = \int_a^b K(s, \varrho) K(t, \varrho) \, d\varrho \tag{2a}$$ *und*

$$K_{\mathrm{II}}(s, t) = \int_a^b K(\varrho, s) K(\varrho, t) \, d\varrho, \tag{2b}$$

so sind diese positiv definit und haben dieselben Eigenwerte; diese seien $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots$ Das Gleichungspaar

$$\left\{ \begin{aligned} \psi(s) &= \lambda \int_a^b K(s, \varrho) \chi(\varrho) \, d\varrho, \\ \chi(s) &= \lambda \int_a^b K(\varrho, s) \psi(\varrho) \, d\varrho \end{aligned} \right. \tag{5}$$

kann durch nicht identisch verschwindende Funktionen $\psi(s)$ und $\chi(s)$ dann und nur dann befriedigt werden, wenn $\lambda = \lambda_n \ (n = 1, 2, \ldots)$ und $\psi(s) = \psi_n(s)$ eine zu λ_n^2 gehörige Eigenfunktion von $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ ist. Die $\chi_n(s)$ ergeben dann von selbst das vollständige Orthogonalsystem des Kernes $K_{\mathrm{II}}(s, t)$. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ nennt man die Eigenwerte von $K(s, t)$ und $\{\psi_n(s)\}$ und $\{\chi_n(s)\}$ die zugehörigen Orthogonalsysteme.

Daß $\{\chi_n(s)\}$ tatsächlich das vollständige Orthogonalsystem zu $K_{\mathrm{II}}(s, t)$ ist, folgt einfach daraus, daß wir ja ebenso gut von irgendeiner Eigenfunktion $\chi_n(s)$ des Kernes $K_{\mathrm{II}}(s, t)$ ausgehen und dazu analog zu (4) $\psi_n^*(s)$ und $\psi_n(s)$ konstruieren können; $\psi_n(s)$ ergibt sich dann als Eigenfunktion von $K_{\mathrm{I}}(s, t)$. Es haben also $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ und $K_{\mathrm{II}}(s, t)$ nicht nur die gleichen Eigenwerte $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots,$ sondern es ist auch die Ordnung von λ_n^2 bei $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ und bei $K_{\mathrm{II}}(s, t)$ dieselbe.

Ist speziell $K(s, t)$ ein symmetrischer Kern, so sind die beiden Gleichungen (5) identisch, ebenso die beiden Orthogonalsysteme $\{\psi_n(s)\}$ und $\{\chi_n(s)\}$. Es ist dann nämlich $K_{\mathrm{I}}(s, t) \equiv K_{\mathrm{II}}(s, t)$ gleich dem ersten iterierten Kerne von $K(s, t)$.

§ 2. Der Entwicklungssatz.

Nachdem wir in § 1 einem jeden unsymmetrischen Kerne in ganz bestimmter Weise sogar zwei Orthogonalsysteme zugeordnet haben, werden wir auch hier wieder fragen, wann wir eine gegebene Funktion $g(s)$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach diesen Funktionen $\psi_n(s)$ bzw. $\chi_n(s)$ entwickeln können. Es kann sich selbstver-

ständlich wieder nur um hinreichende Bedingungen handeln, und natürlich können wir sofort eine hinreichende Bedingung für die Entwickelbarkeit von $g(s)$ nach den $\psi_n(s)$ bzw. den $\chi_n(s)$ angeben. Denn da $\{\psi_n(s)\}$ bzw. $\{\chi_n(s)\}$ das zu dem symmetrischen Kerne $K_{\mathrm{I}}(s,t)$ bzw. $K_{\mathrm{II}}(s,t)$ gehörige Orthogonalsystem ist, so läßt sich nach dem früher bewiesenen Entwicklungssatze $g(s)$ sicher in die gleichmäßig konvergente Reihe

$$(1) \qquad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \psi_n(s) \qquad \left(\gamma_n = \int_a^b g(s)\,\psi_n(s)\,ds\right)$$

entwickeln, wenn die Darstellung als Kernintegral

$$(2) \qquad g(s) = \int_a^b K_{\mathrm{I}}(s,t)\,q(t)\,dt$$

möglich ist; und Analoges gilt für die Entwicklung nach den $\chi_n(s)$. Wir wollen aber untersuchen, ob wir unter den besonderen hier obwaltenden Verhältnissen nicht mit einer schwächeren Bedingung als hinreichend auskommen. Das ist in der Tat der Fall; wir werden beweisen, daß (1) schon dann immer gilt, wenn sich $g(s)$ mit Hilfe des ursprünglichen unsymmetrischen Kernes $K(s,t)$ quellenmäßig darstellen läßt, und zwar genauer in dieser Form:

$$(3) \qquad g(s) = \int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt,$$

während die Darstellungsmöglichkeit in der Form

$$(4) \qquad g(s) = \int_a^b K(t,s)\,h^*(t)\,dt$$

die Reihenentwicklung

$$(1') \qquad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^* \chi_n(s) \qquad \left(\gamma_n^* = \int_a^b g(s)\,\chi_n(s)\,ds\right)$$

gestattet. (3) und (4) sind hier, im Gegensatze zu dem Falle eines symmetrischen Kernes, zwei wesentlich verschiedene Bedingungen. Aus der Darstellung (3) folgt zunächst, daß

$$(5) \qquad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \psi_n(s)$$

gleichmäßig für $a \leqq s \leqq b$ konvergiert. Das zeigen wir durch eine ganz analoge Überlegung, wie wir sie schon S. 60 durchgeführt

haben, mit Verwendung der Schwarzschen Ungleichung. Es ist nämlich, wenn wir für $g(s)$ die Integraldarstellung (3) einsetzen,

$$\gamma_n = \int_a^b \int_a^b K(s, t) h(t) \psi_n(s)\, ds\, dt,$$

und wenn wir zuerst nach s integrieren, so folgt wegen (5), § 1,

$$\gamma_n = \int_a^b h(t) \frac{\chi_n(t)\, dt}{\lambda_n} = \frac{c_n}{\lambda_n}. \tag{6}$$

Dabei bezeichnen also c_n die Fourierkoeffizienten von $h(s)$ in bezug auf das System $\{\chi_n(s)\}$. Wir haben somit für einen beliebigen Reihenabschnitt von (5)

$$\sum_{\nu=n}^{n+p} \gamma_\nu \psi_\nu(s) = \sum_{\nu=n}^{n+p} \frac{c_\nu}{\lambda_\nu} \psi_\nu(s) = \sum_{\nu=n}^{n+p} \frac{c_\nu}{\lambda_\nu} \lambda_\nu \int_a^b K(s, t) \chi_\nu(t)\, dt.$$

Hier können wir, da es sich ja um eine endliche Summe handelt, Summation und Integration vertauschen. Wenden wir nun die Schwarzsche Ungleichung an, so folgt

$$\left(\int_a^b K(s, t) \cdot \sum_{\nu=n}^{+p} c_\nu \chi_\nu(t)\, dt\right)^2 \leqq \int_a^b K^2(s, t)\, dt \cdot \int_a^b \left(\sum_{\nu=n}^{n+p} c_\nu \chi_\nu(t)\right)^2 dt.$$

Das letzte Integral errechnet sich wegen der Orthogonalität der $\chi_\nu(s)$ zu $\sum_{\nu=n}^{n+p} c_\nu^2$, und das erste Integral bleibt für alle s unterhalb einer festen Konstanten. Da $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2$ konvergent ist, so ist, bei beliebigem p, $\lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=n}^{n+p} c_\nu^2 = 0$ und folglich für hinreichend großes n

$$\left| \sum_{\nu=n}^{n+p} \gamma_\nu \psi_\nu(s) \right| < \varepsilon$$

gleichzeitig für alle s; die gleichmäßige Konvergenz von (5) ist somit bewiesen. Betrachtet man für ein festes s die positiven und die negativen Glieder für sich, so erkennt man, daß die Reihe auch absolut konvergiert.

Es erübrigt noch, zu zeigen, daß die Reihe (5) tatsächlich die gegebene Funktion $g(s)$ darstellt; mit anderen Worten, wir müssen

noch $G(s) \equiv g(s)$ nachweisen. Dazu rechnen wir aus, daß

$$(7) \qquad \int_a^b \{G(s) - g(s)\}^2 ds = 0$$

ist. In der Tat haben wir, wenn wir für $G(s)$ den Wert (5) und für $g(s)$ den Integralausdruck (3) einsetzen,

$$(8) \quad \int_a^b \{G(s) - g(s)\}^2 ds = \int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \psi_n(s) \right\}^2 ds$$
$$- 2\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \psi_n(s) \cdot \int_a^b K(s,t) h(t) dt \right\} ds + \int_a^b g^2(s) ds.$$

In dem ersten Integrale rechts dürfen wir wegen der soeben bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz Summation und Integration vertauschen und erhalten mit Rücksicht auf die Orthogonalität und Normiertheit von $\{\psi_n(s)\}$ einfach $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2$. Im zweiten Integrale können wir das Summationszeichen ebenfalls vor das Integral ziehen; integrieren wir zuerst nach s, so erhalten wir

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \int_a^b \int_a^b K(s,t) \psi_n(s) h(t) ds dt = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \int_a^b h(t) \frac{\chi_n(t)}{\lambda_n} dt$$
$$= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \frac{c_n}{\lambda_n}.$$

Es wird also wegen (6) dieses mittlere Glied gleich $-2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2$. Endlich ist noch, mit Rücksicht auf (3),

$$\int_a^b g^2(s) ds = \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(s,r) h(r) K(s,\varrho) h(\varrho) dr\, d\varrho\, ds.$$

Wenn wir zuerst nach s integrieren, so haben wir,

$$\int_a^b g^2(s) ds = \int_a^b \int_a^b K_{II}(r,\varrho) h(r) h(\varrho) dr\, d\varrho.$$

Nun wissen wir, daß $K_{II}(s,t)$ ein positiv definiter Kern ist; wir können also den Mercerschen Satz (vgl. S. 102) anwenden und für

$K_{II}(r, \varrho)$ nach Satz 1, § 1, den Wert

$$K_{II}(r, \varrho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(r)\chi_n(\varrho)}{\lambda_n^2}$$

einsetzen. Diese Reihe ist gleichmäßig konvergent, und es ergibt sich somit mit Rücksicht auf (6)

$$\int_a^b g^2(s)\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_a^b\!\!\int_a^b \chi_n(r)h(r)\chi_n(\varrho)h(\varrho)\,dr\,d\varrho = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2.$$

Setzen wir die so errechneten Werte der einzelnen Glieder in (8) ein, so ergibt sich tatsächlich Null, und (7) ist bewiesen. Aus (7) aber folgt $G(s) \equiv g(s)$, und wir haben den

Satz 1: *Jede Funktion $g(s)$, die sich in der Form*

$$g(s) = \int_a^b K(s, t)h(t)\,dt \quad \textit{bzw.} \quad g(s) = \int_a^b K(t, s)h^*(t)\,dt$$

quellenmäßig darstellen läßt, kann in die gleichmäßig konvergente Reihe

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \psi_n(s) \quad \textit{bzw.} \quad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^* \chi_n(s)$$

entwickelt werden; dabei sind die γ_n bzw. γ_n^* in der bekannten Weise die Fourierkoeffizienten von $g(s)$ in bezug auf das System $\{\psi_n(s)\}$ bzw. $\{\chi_n(s)\}$.

Wir wollen uns an einem einfachen Beispiele davon überzeugen, daß die beiden Bedingungen (3) und (4) tatsächlich sehr verschieden voneinander sind, und daß es sehr wohl sein kann, daß eine Funktion $g(s)$ nach den Funktionen des Systemes $\{\psi_n(s)\}$ entwickelbar ist, nicht aber nach denen des Systemes $\{\chi_n(s)\}$. Dazu gehen wir aus von dem Kerne

$$K(s, t) = \sin s \cos t$$

für das Intervall $0 \ldots 2\pi$. Hier ergibt sich

$$K_I(s, t) = \int_0^{2\pi} \sin s \cos \varrho \cdot \sin t \cos \varrho \, d\varrho = \pi \sin s \sin t$$

und $$K_{II}(s, t) = \int_0^{2\pi} \sin \varrho \cos s \cdot \sin \varrho \cos t \, d\varrho = \pi \cos s \cos t.$$

Es besteht also $\{\psi_n(s)\}$ aus der einzigen Funktion $\frac{\sin s}{\sqrt{\pi}}$, das System

$\{\chi_n(s)\}$ aus der einzigen Funktion $\frac{\cos s}{\sqrt{\pi}}$. (Der Faktor $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ tritt infolge der Normierung hinzu.) Der einzige Eigenwert von $K_{\mathrm{I}}(s,t)$ und $K_{\mathrm{II}}(s,t)$ ist $\lambda_1^2 = \frac{1}{\pi^2}$. Nebenbei wollen wir an diesem Beispiele den Satz 1, § 1, bestätigen. In der Tat besteht das Gleichungssystem

$$\psi_1(s) = \frac{\sin s}{\sqrt{\pi}} = \lambda_1 \int_0^{2\pi} K(s,\varrho)\chi_1(\varrho)\,d\varrho = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin s \cos\varrho \frac{\cos\varrho}{\sqrt{\pi}}\,d\varrho,$$

$$\chi_1(s) = \frac{\cos s}{\sqrt{\pi}} = \lambda_1 \int_0^{2\pi} K(\varrho,s)\psi_1(\varrho)\,d\varrho = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\varrho \cos s \frac{\sin\varrho}{\sqrt{\pi}}\,d\varrho.$$

Eine Funktion $g(s)$, welche die Darstellung (3) gestattet, also hier

$$g(s) = \int_0^{2\pi} \sin s \cos\varrho\, h(\varrho)\,d\varrho,$$

ist von der Gestalt $g(s) = c \sin s$ und in der Form (1) darstellbar, nämlich

$$g(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu \psi_\nu(s) = \gamma_1 \psi_1(s) = \sqrt{\pi}\, c \cdot \frac{\sin s}{\sqrt{\pi}}.$$

Sie ist aber nicht nach den anderen Funktionen $\chi_n(s)$ entwickelbar; denn das würde hier

$$g(s) = c \sin s = \gamma_1^* \chi_1(s) = \gamma_1^* \frac{\cos s}{\sqrt{\pi}}$$

bedeuten, und das ist nicht möglich, da $\sin s$ und $\cos s$ linear unabhängig sind.

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch bei den unsymmetrischen Kernen das Analogon zu der Entwicklung eines Kernes nach seinen Eigenfunktionen aufstellen. Wir hatten früher (vgl. S. 55) bewiesen, daß für einen symmetrischen Kern $K(s,t)$ die Darstellung

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{\lambda_n}$$

gilt, wenn diese Reihe gleichmäßig konvergiert. Entsprechend werden wir den Satz vermuten:

Satz 2: *Wenn* $\{\psi_n(s)\}$ *und* $\{\chi_n(s)\}$ *die beiden zu dem unsymmetrischen Kerne* $K(s, t)$ *gehörigen Orthogonalsysteme sind, so gilt die Darstellung*

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(s)\chi_n(t)}{\lambda_n}, \tag{9}$$

sobald diese Reihe gleichmäßig in s und t konvergiert.

Um das zu beweisen, nehmen wir die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (9) an und setzen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(s)\chi_n(t)}{\lambda_n} = G(s, t). \tag{10}$$

Wir bilden nun einen neuen Kern

$$K^*(s, t) = K(s, t) - G(s, t) \tag{11}$$

und wollen von diesem nachweisen, daß er identisch Null ist. Dazu bilden wir

$$\int_a^b K^*(s, t)^2 dt = \int_a^b K(s, t) K(s, t)\, dt - 2\int_a^b K(s, t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(s)\chi_n(t)}{\lambda_n}\, dt$$
$$+ \int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(s)\chi_n(t)}{\lambda_n} \right\}^2 dt.$$

Das erste Integral rechts ist $K_{\mathrm{I}}(s, s)$. Wegen der vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz von (10) dürfen wir in dem mittleren Integrale Summation und Integration vertauschen und erhalten dafür mit Rücksicht auf (5), § 1,

$$-2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(s)\psi_n(s)}{\lambda_n^2} = -2K_{\mathrm{I}}(s, s).$$

Ebenso errechnet sich das letzte Integral wegen der Orthogonalität in der bekannten Weise zu $K_{\mathrm{I}}(s, s)$, so daß im ganzen

$$\int_a^b K^*(s, t)^2 dt \equiv 0$$

herauskommt. Daraus schließen wir $K^*(s, t) \equiv 0$, und es ist also wegen (11) Satz 2 bewiesen.

§ 3. Die Zerlegung gewisser symmetrischer Kerne. Anwendungen.

Die Orthogonalsysteme $\{\psi_n(s)\}$ und $\{\chi_n(s)\}$ in § 1 und der Entwicklungssatz in § 2 wurden dadurch gewonnen, daß wir zu dem ursprünglich gegebenen Kerne $K(s, t)$ uns die symmetrischen Kerne $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ und $K_{\mathrm{II}}(s, t)$ bildeten. Es ist interessant, daß unter Umständen der umgekehrte Weg von Vorteil sein kann. Wir erinnern uns an die Bemerkung (S. 144) vor der Ableitung des Entwicklungssatzes, daß wir für die Entwickelbarkeit einer gegebenen Funktion $g(s)$ nach den $\psi_n(s)$ in der Darstellungsmöglichkeit

$$g(s) = \int_a^b K_{\mathrm{I}}(s, t)\, q(t)\, dt \tag{1}$$

eine reichlich starke Bedingung haben. Dabei waren wir von dem (unsymmetrischen) Kerne $K(s, t)$ ausgegangen und hatten uns den symmetrischen Kern $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ aus diesem gebildet. Jetzt wollen wir uns einen symmetrischen Kern als ersten gegeben denken; der Gleichförmigkeit halber nennen wir ihn und sein Orthogonalsystem $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ bzw. $\{\psi_n(s)\}$. Dann ist (1) gewiß eine hinreichende Bedingung für die Entwickelbarkeit von $g(s)$ nach den $\psi_n(s)$; aber wir können versuchen, ob wir diese nicht durch eine schwächere ersetzen können. Das ist nach § 2, Satz 1, möglich, wenn es uns gelingt, den Kern $K_{\mathrm{I}}, (s, t)$ mittels eines i. a. allerdings unsymmetrischen Kernes $K(s, t)$ so zu zerlegen, daß

$$K_{\mathrm{I}}(s, t) = \int_a^b K(s, \varrho) K(t, \varrho)\, d\varrho \tag{2}$$

ist; denn dann reicht ja, wie wir wissen, für die Entwickelbarkeit von $g(s)$ schon die schwächere Bedingung der Darstellungsmöglichkeit

$$g(s) = \int_a^b K(s, \varrho)\, h(\varrho)\, d\varrho$$

aus. Nach unseren obigen Überlegungen hat jedoch dieser Versuch nur dann Aussicht auf Erfolg, wenn der Ausgangskern $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ positiv definit ist; denn die Eigenwerte eines jeden nach (2) gebildeten Kernes $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ sind positiv. Dieser Gedanke ist in einer interessanten Arbeit von *E. Trefftz*[1]) durchgeführt für die Integralgleichung der schwingenden Saite und des schwingenden Stabes.

1) E. Trefftz, Schwingungsprobleme und Integralgleichungen, *Math. Ann.*, Bd. 87 (1922).

Wir wollen diese Betrachtung noch ein wenig genauer erläutern an dem Beispiele der Saitenschwingung. Haben wir die in 0 und l festgehaltene Saite mit der (veränderlichen) Massendichte $\mu(s)$, so gilt für die Amplitudenfigur der Eigenschwingungen die homogene Integralgleichung (vgl. (4) und (5) in Kap. I, § 2)

$$\psi_n(s) = \lambda_n^2 \int_0^l \sqrt{\mu(s)}\sqrt{\mu(t)}\, V(s,t)\,\psi_n(t)\,dt. \tag{3}$$

Unserer zuletzt gebrauchten Bezeichnungsweise gemäß ist also

$$K_{\mathrm{I}}(s,t) = \sqrt{\mu(s)}\sqrt{\mu(t)}\, V(s,t) \tag{4}$$

zu setzen. Dabei erinnern wir uns an die Bedeutung von $V(s,t)$, nämlich

$$V(s,t) = \begin{cases} \dfrac{s(l-t)}{Sl} & \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq t, \\ \dfrac{t(l-s)}{Sl} & \text{für} \quad t \leqq s \leqq l, \end{cases} \tag{5}$$

wenn S die der Saite gegebene Vorspannung ist. Eine willkürliche Funktion $g(s)$ ist nach dem früheren Entwicklungssatze in eine Fourierreihe nach diesen speziellen Eigenfunktionen $\psi_n(s)$ entwickelbar, wenn sie die Darstellung

$$g(s) = \int_0^l K_{\mathrm{I}}(s,t)\, q(t)\,dt \tag{6}$$

gestattet. Diese Bedingung können wir hier sehr einfach mechanisch deuten, wenn wir sie in dieser Form schreiben:

$$\frac{g(s)}{\sqrt{\mu(s)}} = \int_0^l V(s,t)\cdot\sqrt{\mu(t)}\, q(t)\,dt. \tag{6'}$$

Das besagt nämlich, wenn wir an die in Kap. I, § 1, auseinandergesetzte Bedeutung der Einflußfunktion $V(s,t)$ denken, daß es eine Kräfteverteilung $\sqrt{\mu(t)}\,q(t)$ pro Längeneinheit der Saite gibt, die als Deformationsfigur gerade $\dfrac{g(s)}{\sqrt{\mu(s)}}$ erzeugt. Nun wissen wir aber auf Grund der Differentialgleichung der schwingenden Saite, daß die Kräfte, die eine bestimmte Deformation hervorrufen, durch die zweiten Ableitungen derselben gegeben sind. Es muß also, wenn die Bedingung (6) möglich sein soll, die Funktion $\dfrac{d^2}{ds^2}\left(\dfrac{g(s)}{\sqrt{\mu(s)}}\right)$ von 0 bis l quadratisch integrabel sein.

Diese ziemlich einschränkende Bedingung für $g(s)$ können wir nun durch folgende Überlegung erweitern. Wie wir aus (5) sehen, ist $V(s,t)$ aus zwei bei $s = t$ aneinander stoßenden linearen Stücken zusammengesetzt; die Ableitung $\frac{\partial V(s,t)}{\partial s}$ ist also stückweise konstant. Das gleiche gilt von $\frac{\partial V(s,t)}{\partial t}$, und zwar ist

$$(7) \qquad \frac{\partial V(s,\varrho)}{\partial \varrho} = \begin{cases} \frac{l-s}{Sl} & \text{für} \quad \varrho < s, \\ \frac{-s}{Sl} & \text{für} \quad \varrho > s. \end{cases}$$

Der Unterschied dieser beiden konstanten Werte ist

$$(7') \qquad \left(\frac{\partial V(s,\varrho)}{\partial \varrho}\right)_{\varrho<s} - \left(\frac{\partial V(s,\varrho)}{\partial \varrho}\right)_{\varrho>s} = \frac{1}{S}.$$

Bilden wir also

$$J = S\int_0^l \frac{\partial V(s,\varrho)}{\partial \varrho}\,\frac{\partial V(t,\varrho)}{\partial \varrho}\,d\varrho$$

$$= S\left\{\int_0^t \frac{\partial V(s,\varrho)}{\partial \varrho}\,\frac{\partial V(t,\varrho)}{\partial \varrho}\,d\varrho + \int_t^l \frac{\partial V(s,\varrho)}{\partial \varrho}\,\frac{\partial V(t,\varrho)}{\partial \varrho}\,d\varrho\right\},$$

so ergibt sich durch partielle Integration

$$J = S\left\{\left[V(s,\varrho)\,\frac{\partial V(t,\varrho)}{\partial \varrho}\right]_0^t + \left[V(s,\varrho)\,\frac{\partial V(t,\varrho)}{\partial \varrho}\right]_t^l\right\},$$

denn der Integrand des Restintegrales ist wegen des Faktors $\frac{\partial^2 V(t,\varrho)}{\partial \varrho^2}$ Null. Beachten wir, daß $V(s,0) = V(s,l) = 0$ ist, so folgt, da im ersten Summanden $\varrho < t$, im zweiten $\varrho > t$ ist, wegen (7′) hieraus

$$(8) \qquad S\int_0^l \frac{\partial V(s,\varrho)}{\partial \varrho}\,\frac{\partial V(t,\varrho)}{\partial \varrho}\,d\varrho = V(s,t).$$

Man kann (8) auch direkt ausrechnen, indem man für $s < t$ das Integral (8) zerlegt in die drei Integrale von 0 bis s, von s bis t und von t bis l und für die beiden Faktoren im Integranden die entsprechenden Werte aus (7) einsetzt; analog für $s > t$. Wegen (4) ist somit

$$(9) \qquad K_{\mathrm{I}}(s,t) = \int_0^l \sqrt{S\,\mu(s)}\,\frac{\partial V(s,\varrho)}{\partial \varrho}\cdot\sqrt{S\,\mu(t)}\,\frac{\partial V(t,\varrho)}{\partial \varrho}\,d\varrho.$$

Setzen wir also

$$K(s,t) = \sqrt{S\,\mu(s)}\,\frac{\partial V(s,t)}{\partial t}, \tag{10}$$

so ist unser Ausgangskern der erste der beiden zu dem unsymmetrischen Kerne (10) nach § 1, Satz 1, adjungierten symmetrischen Kerne, und das durch (8) gegebene Orthogonalsystem $\{\psi_n(s)\}$ ist das erste zu $K(s,t)$ gehörige Orthogonalsystem. Nach Satz 1, § 2, ist nun aber schon jede Funktion $g(s)$ in eine Fourierreihe nach den $\psi_n(s)$ entwickelbar, die sich in der Form

$$g(s) = \int_0^l \sqrt{S\mu(s)}\,\frac{\partial V(s,t)}{\partial t}\,h(t)\,dt \tag{11}$$

darstellen läßt; das setzt wegen (7) voraus, daß $g(0) = g(l) = 0$ ist. Schreiben wir (11) in der zu (6') analogen Gestalt

$$\frac{g(s)}{\sqrt{S\mu(s)}} = \int_0^l \frac{\partial V(s,t)}{\partial t}\,h(t)\,dt \tag{11'}$$

und nehmen an, es sei $g(0) = g(l) = 0$, so wird (11') durch

$$h(t) = S\,\frac{d}{dt}\left(\frac{g(t)}{\sqrt{S\,\mu(t)}}\right)$$

befriedigt, wie man wieder mittels partieller Integration, oder auch direkt durch Einsetzen der Werte für $\frac{\partial V(s,t)}{\partial t}$ aus (7) ausrechnet. Wir brauchen also nur noch die schwächere Voraussetzung zu machen, daß die erste Ableitung von $\frac{g(s)}{\sqrt{\mu(s)}}$ quadratisch integrabel ist.

Satz 1: *Wie das Beispiel der schwingenden Saite lehrt, läßt sich unter Umständen ein gegebener positiv definiter Kern in der Weise auf einen unsymmetrischen zurückführen, daß er als der eine der beiden zu diesem unsymmetrischen Kerne gemäß § 1, Satz 1, gehörigen symmetrischen Kerne erscheint. Für die Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen des Ausgangskernes bedeutet dies eine Milderung der Schmidtschen Bedingung für die Entwickelbarkeit.*

Die soeben durchgeführte Zerlegung unseres speziellen Kernes (4) bestätigt mit Rücksicht auf § 1, Satz 1, von neuem, daß alle seine Eigenwerte positiv sind, wie wir es ja in (8) durch die Schreibweise λ_n^2 schon zum Ausdrucke gebracht haben. Wir hatten dies seinerzeit aus physikalischen Betrachtungen gefolgert.

In ganz ähnlicher Weise läßt sich der Kern derjenigen Integralgleichung, auf die das Problem des schwingenden Stabes führt, zerlegen und damit auch hier eine Milderung der Bedingung für die Entwickelbarkeit einer gegebenen Funktion gewinnen. Doch sei bezüglich der Einzelheiten auf die oben zitierte Arbeit verwiesen.

In den physikalischen Anwendungen hat die Konvergenzbedingung eine einfache Bedeutung: Es muß die Gesamtenergie des Anfangszustandes endlich sein. D. h. die Reihen konvergieren in jedem physikalisch realisierbaren Falle.

§ 4. Die Lösung der inhomogenen Gleichung.

Wir wenden uns nun dem Ausgangsprobleme dieses Kapitels zu, nämlich dem, die Gleichung

$$f(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\eta(t)\,dt \tag{1}$$

zu lösen. Hier und im folgenden ist λ stets, wie auch früher, ein reeller Parameterwert. Da sich im Falle der Lösbarkeit von (1) die Differenz $\eta(s) - f(s)$ als Kernintegral ergibt, so könnte man im Anschlusse an Satz 1, § 2, daran denken, es mit dem Ansatze

$$\eta(s) - f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(s)$$

zu versuchen. Man überzeugt sich jedoch leicht, daß man auf diese Weise hier (im Gegensatze zu den symmetrischen Kernen) nicht zum Ziele kommt. Lassen wir die Frage, ob (1) eine Lösung besitzt oder nicht, noch offen, so können wir uns doch die Aufgabe stellen, in (1) die Funktion $\eta(s)$ so zu bestimmen, daß der Ausdruck auf der rechten Seite sich von $f(s)$ möglichst wenig unterscheidet, oder genauer so, daß das Integral über das Fehlerquadrat ein Minimum wird. Unter dem Fehler $F(s)$ verstehen wir den Ausdruck

$$F(s) = f(s) - \eta(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt. \tag{2}$$

Wir wollen nun $\eta(s)$ als die Funktion ermittelt denken, für welche

$$\int_a^b F^2(s)\,ds = \text{Minimum} \tag{3}$$

wird. Da es sich hierbei nur um eine orientierende Überlegung han-

delt, die uns zeigen soll, inwiefern wir die Lösung von (1) auf die einer Integralgleichung mit symmetrischem Kerne zurückführen können, so wollen wir einstweilen voraussetzen, daß alle vorkommenden Funktionen stetig sind. Wir werden folgendes zeigen: Entweder muß $F(s) \equiv 0$ sein; das aber bedeutet, daß (1) lösbar ist; oder aber, es muß $F(s)$ der homogenen Gleichung

$$(4)\qquad F(s) = \lambda \int_a^b K(\varrho, s) F(\varrho) d\varrho$$

genügen. Für alle λ, für welche diese homogene Gleichung (4) nicht lösbar ist, existiert demnach eine Lösung von (1).

Um zu diesem Resultate zu kommen, gehen wir von der Überlegung aus, daß das Integral (3) einen größeren Wert erhält, wenn wir in $F(s)$ die Funktion $\eta(s)$ durch irgendeine andere, etwa $y(s)$, ersetzen. Wir wählen $y(s)$ speziell in der Form

$$(5)\qquad y(s) = \eta(s) + x\omega(s),$$

wo $\omega(s)$ eine beliebige, stetige Funktion und x ein reeller Zahlenfaktor sein soll. Die mit $y(s)$ gebildete Fehlerfunktion (2) wollen wir mit $\bar{F}(s)$ bezeichnen. Halten wir in (5) zunächst auch die irgendwie gewählte Funktion $\omega(s)$ fest, so wird das Fehlerintegral (3) eine Funktion allein von x, also

$$(6)\qquad J(x) = \int_a^b \bar{F}^2(s) ds = \int_a^b \Big\{ f(s) - [\eta(s) + x\omega(s)] + \lambda \int_a^b K(s, t)[\eta(t) + x\omega(t)] dt \Big\}^2 ds$$

Gemäß der obigen Bedeutung von $\eta(s)$, (3) zu einem Minimum zu machen, folgern wir, daß $J(x)$ an der Stelle $x = 0$ ein Minimum hat; es muß also notwendigerweise

$$(7)\qquad \left(\frac{dJ(x)}{dx}\right)_{x=0} = 0$$

sein. Führen wir diese Differentiation aus, so ergibt sich, wenn wir hinterher $x = 0$ einsetzen,

$$(7')\qquad \int_a^b F(s) \left[-\omega(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \omega(t) dt \right] ds = 0.$$

Zu dieser Gleichung (7') kommen wir stets, wie auch $\omega(s)$ gewählt wird. Hiervon machen wir Gebrauch, indem wir über $\omega(s)$ noch

zweckmäßig verfügen. Es sei σ eine beliebige Stelle des Intervalles $a \ldots b$ und $\varepsilon > 0$ eine kleine positive Größe. Dann wählen wir $\omega(s)$ als stetige Funktion so, daß außerhalb des Intervalles $\sigma - \varepsilon \leqq s \leqq \sigma + \varepsilon$ stets $\omega(s) = 0$ ist und außerdem

$$\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon} \omega(s)\,ds = 1$$

wird. Das ist immer möglich, wie klein wir auch die positive Größe ε nehmen. Lassen wir nun $\varepsilon \to 0$ gehen, so wird

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b F(s)\,\omega(s)\,ds = F(\sigma) \qquad \text{und} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b K(s, t)\,\omega(t)\,dt = K(s, \sigma).$$

Wir folgern hieraus: Wenn in (1) $\eta(s)$ so gewählt ist, daß das Integral des Fehlerquadrates ein Minimum wird, so muß die Fehlerfunktion $F(s)$ selbst notwendigerweise der homogenen Gleichung

$$F(s) = \lambda \int_a^b K(t, s) F(t)\,dt \tag{4}$$

genügen. Das ergibt sich sofort, wenn wir in (7′) die obigen Grenzwerte einsetzen, dann die Integrationsvariable mit t bezeichnen und statt der Variablen σ wieder s schreiben. In (4) wollen wir für $F(s)$ seinen Wert (2) einführen; dann erhalten wir, wenn wir nur die η enthaltenden Bestandteile auf die rechte Seite nehmen,

$$f(s) - \lambda \int_a^b K(t, s) f(t)\,dt = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\,\eta(t)\,dt - \lambda \int_a^b K(t, s)\,\eta(t)\,dt$$
$$+ \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(t, s) K(t, \varrho)\,\eta(\varrho)\,d\varrho\,dt.$$

Die linke Seite ist, ebenso wie $f(s)$, eine bekannte Funktion, die wir mit $\bar{f}(s)$ bezeichnen wollen. Vertauschen wir in dem letzten Doppelintegrale noch die Bezeichnung der beiden Integrationsvariabeln ϱ und t, so erhalten wir

$$\bar{f}(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b \left[K(s, t) + K(t, s) - \lambda \int_a^b K(\varrho, s)\, K(\varrho, t)\,d\varrho \right] \eta(t)\,dt.$$

Zusammenfassend stellen wir fest: Wenn sich $\eta(s)$ so bestimmen läßt, daß das Integral des Fehlerquadrates ein Minimum wird, so

muß dieses einer Integralgleichung mit symmetrischem Kerne genügen, nämlich

$$(8) \qquad \bar{f}(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b Q(s,t)\,\eta(t)\,dt, \qquad \text{wobei}$$

$$(8') \qquad \begin{cases} \bar{f}(s) = f(s) - \lambda \int_a^b K(t,s) f(t)\,dt, \\ Q(s,t) = K(s,t) + K(t,s) - \lambda \int_a^b K(\varrho, s) K(\varrho, t)\,d\varrho \end{cases}$$

zu setzen ist. Wenn außerdem die homogene Gleichung (4) keine Lösung besitzt, so muß $F(s) \equiv 0$, d. h. (1) auflösbar sein.

Wie schon oben gesagt, sollen diese Überlegungen uns nur darüber orientieren, in welcher Weise wir von der vorgelegten Gleichung (1) mit dem unsymmetrischen Kerne $K(s, t)$ zu einer solchen mit symmetrischem Kerne gelangen können. Nachdem wir deren Gestalt gefunden haben, beginnen wir jetzt unsere Betrachtungen damit, daß wir von (8) ausgehen, wobei wir über den Kern $K(s, t)$ und die freie Funktion $f(s)$ nur noch quadratische Integrierbarkeit vorauszusetzen brauchen.

I. Es sei λ kein Eigenwert von $Q(s, t)$. Dann ist (8) lösbar. Wir können nun diese Gleichung gemäß den obigen Ausführungen mit Berücksichtigung von (8′) in der folgenden Form schreiben

$$(8'') \quad f(s) - \eta(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt$$
$$= \lambda \int_a^b K(t,s) \left\{ f(t) - \eta(t) + \lambda \int_a^b K(t,\varrho)\,\eta(\varrho)\,d\varrho \right\} dt$$

oder, wenn wir die linke Seite mit $F(s)$ bezeichnen,

$$F(s) = \lambda \int_a^b K(t,s) F(t)\,dt.$$

Es sind hier nur zwei Fälle möglich: Entweder die homogene Gleichung (4) hat keine eigentliche Lösung; dann besagt (8″), daß

$$F(s) = f(s) - \eta(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt \equiv 0$$

ist, daß also die Lösung $\eta(s)$ von (8) gleichzeitig Lösung von (1) ist.

Oder aber (4) gestattet eine nichttriviale Lösung; dann können wir diese Folgerung nicht ziehen und also über die Lösbarkeit von (1) zunächst nichts Näheres aussagen.

II. Es sei λ ein Eigenwert von $Q(s, t)$. Dann hat die homogene Gleichung

$$\Phi(s) = \lambda \int_a^b Q(s, t) \Phi(t)\, dt \tag{9}$$

eine eigentliche Lösung. Derselbe Übergang wie von (8) zu (8″) zeigt uns, daß wir (9) auch in der Form

$$\Phi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \Phi(t)\, dt = \lambda \int_a^b K(t, s) \left\{ \Phi(t) - \lambda \int_a^b K(t, \varrho) \Phi(\varrho)\, d\varrho \right\} dt \tag{9'}$$

schreiben können. Da hier $\Phi(s)$ nicht identisch Null ist, so besagt (9′), daß entweder

$$\Phi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \Phi(t)\, dt \equiv 0$$

ist, d. h. daß die zu (4) adjungierte homogene Gleichung

$$G(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) G(t)\, dt \tag{4'}$$

lösbar ist; oder aber es ist mit

$$F(s) = \Phi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \Phi(t)\, dt$$

die homogene Gleichung

$$F(s) = \lambda \int_a^b K(t, s) F(t)\, dt$$

lösbar. Fassen wir das Ergebnis der Diskussion von I und II zusammen, so haben wir den folgenden schon von Fredholm gefundenen

Satz 1: *Die Gleichung*

$$f(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \eta(t)\, dt \tag{1}$$

ist sicher dann lösbar, wenn für diesen Parameterwert λ keine der beiden homogenen Gleichungen

$$F(s) = \lambda \int_a^b K(t, s) F(t)\, dt \quad \textit{und} \quad G(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) G(t)\, dt$$

eine eigentliche Lösung besitzt. Die Lösung $\eta(s)$ von (1) *ist dann identisch mit der Lösung der Gleichung* (8); *diese aber hat nach* (8') *einen symmetrischen Kern und ist also in der früher ausgeführten Weise auflösbar. — Die eigentlichen Lösungen von* (4) *und* (4') *nennt man singuläre Lösungen des Kernes $K(s, t)$.*

Sind die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt, so hat auch die zu (1) adjungierte Gleichung

$$(1') \qquad f(s) = \overline{\eta}(s) - \lambda \int_a^b K(t, s) \overline{\eta}(t)\, dt$$

eine Lösung, wie sich wörtlich ebenso ergibt wie für (1). Beide Male ist die Lösung eindeutig; denn nehmen wir an, es hätte (1) zwei verschiedene Lösungen $\eta_1(s)$ und $\eta_2(s)$, so würde durch Subtraktion folgen, daß gegen die Voraussetzung die homogene Gleichung (4') durch die nicht identisch verschwindende Funktion $G(s) = \eta_1(s) - \eta_2(s)$ befriedigt würde.

Die beiden Gleichungen (4) und (4') sind sehr wohl zu unterscheiden von dem Gleichungspaare (5), § 1. Die λ-Werte für die Schmidtschen Eigenfunktionen haben mit denen, für welche singuläre Lösungen existieren, i. a. gar nichts zu tun. Während die Gleichungen (5) in § 1 stets mindestens für ein λ_1 eine Lösung gestatten (weil nämlich die symmetrischen Kerne $K_{\mathrm{I}}(s, t)$ und $K_{\mathrm{II}}(s, t)$ mindestens einen Eigenwert λ_1^2 besitzen), kann es vorkommen, daß (4) und (4') für sämtliche λ unlösbar sind. Wir werden unten ein einfaches Beispiel eines derartigen Kernes kennenlernen.

Wir wollen nun, allerdings unter der Voraussetzung eines stetigen Kernes $K(s, t)$, die in Satz 1 genannte Bedingung für die Auflösbarkeit von (1) noch vereinfachen. Es stellt sich nämlich heraus, daß dazu schon die Nichtlösbarkeit einer der beiden homogenen Gleichungen genügt. Zu diesem Zwecke werden wir beweisen, daß, wenn (4) eine nichttriviale Lösung besitzt, auch (4') lösbar ist und umgekehrt. Bevor wir dies für einen beliebigen stetigen Kern beweisen, wollen wir es für eine spezielle Gruppe von Kernen durchführen, die uns dann zu dem allgemeinen Beweise verhelfen werden.

Zunächst aber wollen wir feststellen, daß (1) und (1') für hinreichend kleine λ stets lösbar sind. Es ist uns dies zwar schon von der

Betrachtung der Neumannschen Reihe her bekannt (vgl. Kap. II, § 7); wir wollen es aber kurz noch einmal direkt ableiten. Dazu überlegen wir, daß es zu einem bestimmten λ nur endlich viele linear unabhängige Lösungen $F_1(s), \dots F_\varrho(s)$ von

$$F(s) = \lambda \int_a^b K(t, s) F(t)\, dt \tag{4}$$

geben kann. Denn wir können o. B. d. A. $F_1(s), \dots F_\varrho(s)$ als orthogonal zueinander und als normiert annehmen. (Sind sie es noch nicht, so können wir ja das in Kap. II, § 1, auseinandergesetzte Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren anwenden.) Sind nun $\gamma_\varkappa$ die Fourierkoeffizienten irgendeiner Funktion $g(s)$ in bezug auf dieses Orthogonalsystem $F_1(s), \dots F_\varrho(s)$, so ist nach der Besselschen Ungleichung (vgl. S. 45)

$$\sum_{\nu=1}^{\varrho} \gamma_\nu^2 \leqq \int_a^b g^2(s)\, ds.$$

Setzen wir speziell $g(s) = K(s, r)$, wobei r beliebig in $a \dots b$ gewählt, aber zunächst festgehalten wird, so ist

$$\gamma_\varkappa = \int_a^b K(s, r) F_\varkappa(s)\, ds = \frac{F_\varkappa(r)}{\lambda},$$

und die Besselsche Ungleichung besagt

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{\nu=1}^{\varrho} F_\nu^2(r) \leqq \int_a^b K^2(s, r)\, ds.$$

Das gilt für jedes r; es bleibt also diese Ungleichung erhalten, wenn wir beiderseits nach r integrieren. So erhalten wir mit Rücksicht darauf, daß die $F_\varkappa(s)$ normiert sind,

$$\frac{1}{\lambda} \int_a^b \sum_{\nu=1}^{\varrho} F_\nu^2(r)\, dr = \frac{\varrho}{\lambda} \leqq \int_a^b\int_a^b K^2(s, r)\, dr\, ds, \qquad \text{oder}$$

$$\varrho \leqq \lambda \int_a^b\int_a^b K^2(s, t)\, ds\, dt. \tag{10}$$

Dieselbe Abschätzung gilt wörtlich ebenso für die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von (4'). Hieraus schließen wir, daß für hinreichend kleine λ die Gleichung (1) sicher lösbar ist; denn ist λ so

klein, daß die rechte Seite von (10) kleiner als Eins ist, so ist ϱ als ganze Zahl Null. Wir erhalten somit den

Satz 2: *Jede der beiden homogenen Gleichungen* (4) *und* (4') *kann für ein bestimmtes* λ *höchstens endlich viele linear unabhängige Lösungen besitzen; und zwar ist für diese Anzahl* ϱ *eine obere Schranke durch* (10) *gegeben. Daraus folgt, daß* (1) *und* (1') *für hinreichend kleine* λ *stets auflösbar sind.*

Wir wollen noch einen allgemeinen Satz ableiten, den wir bald gebrauchen werden, der aber auch an sich sehr wichtig ist. $K(s, t)$ braucht jetzt noch nicht stetig zu sein; wohl aber sei λ ein Wert, für den weder (4) noch (4') eine Lösung besitzt. Dann haben (1) und (1') für beliebige $f(s)$ Lösungen, also auch speziell die beiden folgenden Gleichungen

(11) $$K(s,r) = H(s,r) - \lambda\int_a^b K(s,t)H(t,r)\,dt,$$

(11') $$K(r,s) = H_1(r,s) - \lambda\int_a^b K(t,s)H_1(r,t)\,dt.$$

Dabei ist zu beachten, daß (11') nicht etwa die zu (11) adjungierte Gleichung ist (wie (1') zu (1)), sondern es steht in (11') eine andere freie Funktion als in (11), nämlich $K(r, s)$. Den Wert von r können wir beliebig in dem Intervalle $a \ldots b$ wählen. Als Erstes stellen wir fest, daß $H_1(s, r) \equiv H(s, r)$ ist. Dazu multiplizieren wir (11') mit $\lambda H(s, \varrho)$ und integrieren nach s; es folgt dann, wenn wir auf der rechten Seite in dem ersten Gliede für $H(s, \varrho)$ den Wert aus (11) einsetzen,

$$\lambda\int_a^b K(r,s)H(s,\varrho)\,ds = \lambda\int_a^b H_1(r,s)\left\{K(s,\varrho) + \lambda\int_a^b K(s,t)H(t,\varrho)\,dt\right\}ds$$
$$- \lambda^2\int_a^b\int_a^b K(t,s)H_1(r,t)H(s,\varrho)\,dt\,ds.$$

Die beiden Doppelintegrale auf der rechten Seite heben sich aber gegenseitig auf; denn sie sind identisch, wenn wir in dem einen die Bezeichnung s und t der beiden Integrationsvariabeln vertauschen. Somit folgt

$$\lambda\int_a^b K(r,s)H(s,\varrho)\,ds = \lambda\int_a^b K(s,\varrho)H_1(r,s)\,ds,$$

oder, mit Rücksicht auf (11) und (11'),

$$H(r, \varrho) - K(r, \varrho) = H_1(r, \varrho) - K(r, \varrho),$$

also $H_1(r, \varrho) = H(r, \varrho)$, und da r und ϱ ganz beliebig sind, so ist die obige Behauptung bewiesen; d. h. die beiden Gleichungen (11) und (11') werden für beliebiges r jedesmal durch dieselbe Funktion gelöst. (11) und (11') heißen die Resolventen des Kernes $K(s, t)$. Im Falle eines symmetrischen Kernes sind beide identisch, und zwar die in Kap. II, § 7, behandelte Hilbertsche Resolvente. Wir nennen auch hier wieder $H(s, r)$ den lösenden Kern; denn ebensowie bei den symmetrischen Kernen können wir auch jetzt die Lösung von (1) sofort durch eine einfache Integration angeben, wenn wir den lösenden Kern haben. Setzen wir nämlich

$$\eta(s) = f(s) + \lambda \int_a^b H(s, \varrho) f(\varrho)\, d\varrho, \tag{12}$$

so befriedigt diese Funktion $\eta(s)$ die Gleichung (1), da

$$f(s) = f(s) + \lambda \int_a^b H(s, \varrho) f(\varrho)\, d\varrho - \lambda \int_a^b K(s, t) \left\{ f(t) + \lambda \int_a^b H(t, \varrho) f(\varrho)\, d\varrho \right\} dt$$

eine Identität ist, wie sich sofort ergibt, wenn man in dem Doppelintegrale rechts zuerst nach t integriert und (11) berücksichtigt. Ebenso folgt, daß

$$\bar{\eta}(s) = f(s) + \lambda \int_a^b H(\varrho, s) f(\varrho)\, d\varrho \tag{12'}$$

die zu (1) adjungierte Gleichung (1') löst. Wir haben somit den

Satz 3: *Ist λ so gewählt, daß die beiden homogenen Gleichungen* (4) *und* (4') *keine eigentliche Lösung besitzen, so sind die beiden Resolventen* (11) *und* (11') *des Kernes $K(s, t)$ lösbar, und zwar durch dieselbe Funktion $H(s, r)$. Diese nennt man den zu $K(s, t)$ gehörigen lösenden Kern, weil mit der Kenntnis von $H(s, r)$ die Lösungen von* (1) *und* (1') *mittels einfacher Integrationen, nämlich durch* (12) *bzw.* (12') *gegeben sind.*

Die oben angekündigte Vereinfachung der Bedingung für die Lösbarkeit von (1) und (1') beweisen wir nun zuerst für eine spezielle Klasse von Kernen, nämlich für die sogenannten *Produktkerne*

$$K^*(s, t) = \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu(s)\, B_\nu(t). \tag{13}$$

Wenn nun die homogene Gleichung

$$(4)\qquad F(s) = \lambda \int_a^b K^*(t, s) F(t)\, dt = \lambda \int_a^b \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu(t) B_\nu(s) F(t)\, dt$$

eine Lösung hat, so folgt hieraus

$$(14)\qquad F(s) = \lambda \sum_{\nu=1}^{N} \omega_\nu B_\nu(s) \quad \text{mit} \quad \omega_\nu = \int_a^b F(t) A_\nu(t)\, dt.$$

Multiplizieren wir in (14) mit $A_\varkappa(s)$, so erhalten wir durch Integration die N Beziehungen

$$\omega_\varkappa = \int_a^b F(s) A_\varkappa(s)\, ds = \lambda \sum_{\nu=1}^{N} \omega_\nu \int_a^b A_\varkappa(s) B_\nu(s)\, ds \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots N)$$

oder, wenn wir

$$(15)\qquad \int_a^b A_\varkappa(s) B_\nu(s)\, ds = \alpha_{\varkappa\nu}$$

setzen, das homogene Gleichungssystem

$$(16)\qquad \begin{cases} (1 - \lambda\alpha_{11})\omega_1 - \lambda\alpha_{12}\omega_2 - \cdots - \lambda\alpha_{1N}\omega_N = 0, \\ -\lambda\alpha_{21}\omega_1 + (1 - \lambda\alpha_{22})\omega_2 - \cdots - \lambda\alpha_{2N}\omega_N = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\lambda\alpha_{N1}\omega_1 - \lambda\alpha_{N2}\omega_2 - \cdots + (1 - \lambda\alpha_{NN})\omega_N = 0. \end{cases}$$

Umgekehrt, wenn die $\omega_\varkappa$ als Lösung von (16) ermittelt sind, so genügt die mit diesen Koeffizienten gebildete Funktion (14) stets der Gleichung (4), wie man durch direktes Einsetzen in (4) leicht bestätigt. Nun ist aber (16) ein System von N homogenen linearen Gleichungen für die N Größen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_N$, und wir haben das Resultat: (4) hat dann und nur dann eine Lösung, wenn die Determinante

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \cdots & -\lambda\alpha_{1N} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1 - \lambda\alpha_{22} & \cdots & -\lambda\alpha_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda\alpha_{N1} & -\lambda\alpha_{N2} & \cdots & 1 - \lambda\alpha_{NN} \end{vmatrix} = 0$$

ist; d. h. dann und nur dann, wenn λ eine Wurzel dieser Gleichung N-ten Grades ist.

Gehen wir nun von der zu (4) adjungierten homogenen Gleichung

$$(4') \qquad G(s) = \lambda \int_a^b K^*(s,t) G(t)\,dt = \lambda \int_a^b \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu(s) B_\nu(t) G(t)\,dt$$

aus, so vertauschen $A_\nu(s)$ und $B_\nu(s)$ nur ihre Rollen, d. h., mit Rücksicht auf (15), es tritt an Stelle von $\alpha_{\varkappa\nu}$ jetzt $\alpha_{\nu\varkappa}$. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit von (4′) besteht dann in dem Verschwinden der Determinante, die aus (17) entsteht, wenn überall $\alpha_{\varkappa\nu}$ durch $\alpha_{\nu\varkappa}$ ersetzt wird. Diese ist aber mit (17) identisch, da sie aus ihr durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen entsteht. Somit haben wir den

Satz 4: *Ist der Kern von der speziellen Form* (18), *so sind für ein bestimmtes λ die homogenen Gleichungen* (4) *und* (4′) *entweder beide lösbar oder beide unlösbar.*

Im Anschlusse hieran können wir ohne Schwierigkeit Kerne angeben, bei denen für alle λ die homogenen Gleichungen unlösbar sind. Ist z. B.

$$K^*(s,t) = \sum_{\nu=1}^{N} \sin(\nu+1)s \cdot \sin \nu t$$

und das Grundintervall $0 \ldots 2\pi$, so sind alle $\alpha_{\varkappa,\varkappa+1} = \pi$, alle anderen $\alpha_{\varkappa\nu} = 0$. Das Gleichungssystem (16) ist also dann folgendes:

$$\begin{aligned}
\omega_1 - \lambda\pi\omega_2 \qquad\qquad &= 0,\\
\omega_2 - \lambda\pi\omega_3 \qquad &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
\omega_{N-1} - \lambda\pi\omega_N &= 0,\\
\omega_N &= 0,
\end{aligned}$$

woraus zu ersehen ist, daß es nur durch $\omega_\nu = 0$ befriedigt werden kann. Es hat also nach Satz 4 für beliebiges λ weder die homogene Gleichung (4) noch die andere (4′) eine Lösung. Der scheinbare Widerspruch, daß doch für jede der N Wurzeln der Gleichung (17) die beiden homogenen Gleichungen (4) und (4′) eine Lösung besitzen, klärt sich dadurch auf, daß (17) zwar höchstens vom N-ten Grade ist, daß sie aber in Spezialfällen von niederer Ordnung, ja sogar von 0-ter Ordnung in λ sein kann. Und so ist es hier; man rechnet leicht aus, daß in diesem besonderen Beispiele der Wert der Determinante (17) unabhängig von der Wahl des λ stets gleich Eins ist. Wir haben damit einen beachtenswerten Unterschied des Verhaltens der symmetrischen und der unsymmetrischen Kerne kennengelernt; denn

dieses Beispiel lehrt, daß es unsymmetrische Kerne gibt, für welche (1) bei beliebigen $f(s)$ für alle λ lösbar ist, was bei den symmetrischen nicht der Fall ist. Dieses Beispiel läßt auch von neuem deutlich erkennen, daß für die Frage der Auflösbarkeit nicht die *Eigenwerte* λ_n, sondern die *singulären* λ*-Werte* in (4) und (4′) maßgebend sind. Diese Unterscheidung tritt erst bei den unsymmetrischen Kernen zutage, da bei den symmetrischen die Eigenwerte und jene speziellen λ-Werte identisch sind.

Nach diesem kleinen Abstecher wenden wir uns nun dem Beweise für die oben ausgesprochene Behauptung zu, daß bei beliebigen stetigen Kernen die Gleichungen (4) und (4′) stets entweder beide lösbar oder beide unlösbar sind, wie wir es für Produktkerne in Satz 4 schon bewiesen haben. Der Grundgedanke des Beweises beruht darauf, den Kern $K(s, t)$ durch einen Produktkern zu approximieren und die Ausgangsgleichung auf eine andere mit einem Produktkerne zurückzuführen, worauf wir dann den Satz 4 anwenden können. Um die Möglichkeit der beliebig genauen Approximation von $K(s, t)$ durch einen Produktkern zu erkennen, denken wir uns $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann teilen wir das Intervall $a \ldots b$ derart in N Teile $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_N$, daß für alle s jedesmal $|K(s, t_1) - K(s, t_2)| \leqq \varepsilon$ ist, wenn t_1 und t_2 beide in demselben Teilintervalle $\Delta_\varkappa$ liegen. Das ist wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $K(s, t)$ immer möglich. Nun setzen wir

$$B_\varkappa(t) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } t \text{ in } \Delta_\varkappa \text{ liegt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um die $A_\varkappa(s)$ zu definieren, wählen wir in jedem Teilintervalle $\Delta_\varkappa$ willkürlich eine Stelle $\tau_\varkappa$ und setzen $A_\varkappa(s) = K(s, \tau_\varkappa)$. Nun führen wir durch

$$(18) \qquad \overline{K}(s, t) = K(s, t) - \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu(s) B_\nu(t)$$

einen neuen Kern $\overline{K}(s, t)$ ein; dann ist offenbar für alle s und t in $a \ldots b$

$$(18') \qquad |\overline{K}(s, t)| = \left| K(s, t) - \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu(s) B_\nu(t) \right| \leqq \varepsilon.$$

Die Approximation denken wir uns so genau ausgeführt, daß

$$\lambda \int_a^b\!\!\int_a^b \overline{K}^2(s, t)\, ds\, dt < 1$$

ist. Dann haben nach Satz 2 für dieses λ die mit $\overline{K}(s, t)$ gebildeten beiden homogenen Gleichungen sicher keine Lösung, und es existiert somit nach Satz 3 der zu $\overline{K}(s, t)$ gehörige lösende Kern $\overline{H}(s, r)$. Gehen wir nun von der vorgelegten Gleichung

$$(1) \qquad f(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \eta(t)\, dt$$

aus, so können wir diese mit Rücksicht auf (18) auch in der folgenden Form schreiben:

$$(19) \quad f(s) + \lambda \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu(s) \int_a^b B_\nu(t)\, \eta(t)\, dt = \eta(s) - \lambda \int_a^b \overline{K}(s, t)\, \eta(t)\, dt.$$

Es ist also $\eta(s)$ gleichzeitig auch Lösung von einer zu $\overline{K}(s, t)$ gehörigen inhomogenen Gleichung, deren freie Funktion die linke Seite von (19) ist. Nach Satz 3 aber können wir dann $\eta(s)$ mittels des lösenden Kernes $\overline{H}(s, r)$ darstellen und erhalten

$$\eta(s) = f(s) + \lambda \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu(s) \int_a^b B_\nu(t)\, \eta(t)\, dt$$
$$+ \lambda \int_a^b \overline{H}(s, r) \left\{ f(r) + \lambda \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu(r) \int_a^b B_\nu(t)\, \eta(t)\, dt \right\} dr.$$

Ordnen wir die Glieder dieser letzten Gleichung noch etwas um, so ergibt sich

$$(20) \quad f^*(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \overline{H}(s, r) f(r)\, dr$$
$$= \eta(s) - \lambda \int_a^b \sum_{\nu=1}^{N} \left\{ A_\nu(s) + \lambda \int_a^b \overline{H}(s, r) A_\nu(r)\, dr \right\} B_\nu(t)\; \eta(t)\, dt.$$

Damit aber haben wir die Gleichung (1) auf eine solche mit einem Produktkern zurückgeführt. Hieraus folgern wir speziell mit Rücksicht auf Satz 4, daß die beiden homogenen Gleichungen (4) und (4′) stets entweder beide lösbar oder beide unlösbar sind. Bei dem Beweise spielt die Approximationsmöglichkeit des Kernes $K(s, t)$ durch einen Produktkern eine wichtige Rolle; um diese in der obigen einfachen Weise durchführen zu können, haben wir uns auf stetige Kerne beschränkt. Für diese gilt nun der

Satz 5: *Bei stetigen Kernen $K(s, t)$ genügt schon die Feststellung der Unlösbarkeit einer der beiden homogenen Gleichungen* (4) *oder* (4'), *um die Existenz der Lösung der inhomogenen Gleichungen* (1) *und* (1') *zu verbürgen.*

Der Beweis gilt unverändert für Kerne, die sich durch stetige Funktionen so approximieren lassen, daß das Integral über das Fehlerquadrat beliebig klein wird. Es kann ferner gezeigt werden (E. Schmidt, Math. Ann. 66), daß die Anzahl der singulären Lösungen für $K(s,t)$ und $K(t,s)$ bei einem festen λ-Wert stets die gleiche ist.

§ 5. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie.[1]

In der Potentialtheorie und in anderen Gebieten der theoretischen Physik spielt die Laplacesche Gleichung

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

eine beherrschende Rolle. Speziell besteht das Hauptproblem in folgendem: Gegeben ist ein Gebiet $\mathfrak{G}$, dessen Rand Λ eine geschlossene, überall stetig gekrümmte Fläche sei. Dann wird eine Funktion $u(x, y, z) = u_p$ gesucht, die erstens überall innerhalb $\mathfrak{G}$ der Gleichung (1) genügt und die zweitens bei Annäherung an einen Randpunkt ω einen vorgeschriebenen Wert g_ω annimmt. Dieses Problem nennt man die *erste Randwertaufgabe*, genauer die erste Randwertaufgabe des Innengebietes, wenn $\mathfrak{G}$ das Innere der Fläche Λ bedeutet, bzw. des Außengebietes, wenn unter $\mathfrak{G}$ der Außenraum von Λ verstanden ist. Bei der *zweiten Randwertaufgabe* wird auch wieder eine Lösung von (1) für das Gebiet $\mathfrak{G}$ gesucht, aber mit einer anderen Randbedingung; errichten wir nämlich in irgendeinem Punkte ω von Λ die Normale n und bilden wir die *normale Ableitung* $\frac{\partial u}{\partial n}$[2], so soll diese, wenn wir hinterher an den Randpunkt ω heranrücken, vorgeschriebene Werte annehmen. Auch hier wieder sprechen wir von der zweiten Randwertaufgabe des Innen- bzw. des Außengebietes je nach der Bedeutung von $\mathfrak{G}$.

---

1) Aus Raummangel können wir in diesem Paragraphen nicht alles im einzelnen ausführen und verweisen dazu auf die einschlägige Literatur (vgl. Schlußbemerkung S. 172).

2) Damit ist der Grenzwert $\lim\limits_{p \to p_1} \frac{u_p - u_{p_1}}{p p_1}$ gemeint, wenn p_1 ein Punkt auf der Normalen n ist und p längs derselben an p_1 heranrückt.

Wir wollen die Anwendungsmöglichkeit der Integralgleichungen zunächst an dem Beispiele der ersten Randwertaufgabe erläutern. Dabei gehen wir von einem etwas allgemeineren Probleme aus, das die erste Randwertaufgabe des Innengebietes und die des Außengebietes als Spezialfälle enthält. Es sei wieder, wie oben, eine geschlossene Fläche Λ gegeben, durch die der gesamte Raum in ein Innengebiet $\mathfrak{J}$ und ein Außengebiet $\mathfrak{A}$ geteilt wird. Wir suchen nun eine Funktion $u(x, y, z) = u_p$, die überall im Innern von $\mathfrak{J}$ und im Innern von $\mathfrak{A}$ der Laplaceschen Gleichung (1) genügt. Außerdem aber soll u_p so beschaffen sein, daß die Grenzwertrelation

$$\alpha u_{i\sigma} + \beta u_{a\sigma} = g_\sigma \tag{2}$$

gilt. Dabei ist σ ein beliebiger Punkt der Randfläche Λ; g_σ bedeutet eine auf Λ vorgegebene Funktion, die wir als stetig voraussetzen wollen; mit $u_{i\sigma}$ bezeichnen wir den Grenzwert der Funktion u_p, wenn p von innen her an den Punkt σ heranrückt, analog mit $u_{a\sigma}$ den Grenzwert von u_p, wenn p innerhalb $\mathfrak{A}$ gegen σ geht. Die Faktoren α und β sind gegebene konstante Zahlenwerte. Setzen wir speziell $\alpha = 1$ und $\beta = 0$, so erhalten wir die oben beschriebene erste Randwertaufgabe des Innengebietes, bei $\alpha = 0$ und $\beta = 1$ die des Außengebietes.

Um dieses allgemeinere Problem zu lösen, stellen wir uns zunächst eine Funktion her, die überall in $\mathfrak{J}$ und in $\mathfrak{A}$ der Gleichung (1) genügt, aber noch ein unbestimmtes Element enthält, dessen Festlegung durch die Randbedingung (2) geregelt werden wird. Dazu machen wir, ohne auf die potentialtheoretischen Überlegungen, die dazu führen, näher einzugehen, den folgenden Ansatz:

$$u_p = \iint\limits_{(\Lambda)} \frac{\partial}{\partial n_\omega}\left(\frac{1}{r_{p\omega}}\right) \cdot \mu_\omega \, d\omega. \tag{3}$$

Dabei bedeutet $r_{p\omega}$ die Entfernung zwischen den beiden Punkten $p(x, y, z)$ und $\omega(\xi, \eta, \zeta)$ und $\frac{\partial}{\partial n_\omega}$ die in der vorigen Anmerkung beschriebene normale Ableitung. Man nennt eine solche Funktion u_p das *Doppelbelegungspotential* oder das *Potential einer Doppelschicht vom Momente* μ_ω der Fläche Λ. Diese Funktion u_p befriedigt nun in der Tat stets die Laplacesche Gleichung (1), wenn der Punkt p nicht auf der Fläche liegt. Das läßt sich durch elementare Differentiation bestätigen, indem man $r_{p\omega} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ einsetzt und Δu ausrechnet; dabei darf, weil $p(x, y, z)$ von allen Randpunkten $\omega(\xi, \eta, \zeta)$ eine endliche Entfernung hat, unter dem Inte-

grale differenziert werden, und die Reihenfolge der Differentiationen läßt sich vertauschen. Die Addition $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ergibt dann stets Null. Es hat aber die durch (3) eingeführte Funktion noch eine andere, gerade für unsere Zwecke sehr wichtige Eigenschaft.[1]) Wenn wir den Punkt p etwa von innen nach außen hin durch Λ hindurchwandern lassen, so ändert sich u_p dabei nicht stetig, sondern erfährt einen Sprung. Genauer gilt, wenn σ ein beliebig gewählter Punkt auf Λ ist, die Beziehung

$$(4) \qquad u_{i\sigma}=u_\sigma+2\pi\mu_\sigma \quad \text{und} \quad u_{a\sigma}=u_\sigma-2\pi\mu_\sigma.$$

Dabei ist scharf zwischen u_σ und $u_{i\sigma}$ bzw. $u_{a\sigma}$ zu unterscheiden; bei u_σ ist in (3) von vornherein p mit dem Randpunkte σ identisch, bei $u_{i\sigma}$ dagegen rückt der im Innengebiete $\mathfrak{J}$ gelegene Punkt $p\equiv i$ erst nach der Ausführung der in (3) angegebenen Differential- und Integraloperationen an den Randpunkt σ heran; und analog bei $u_{a\sigma}$. Diese Beziehungen (4) lehren uns nun, wie wir die in (3) noch unbestimmt gebliebene Funktion μ_ω zu wählen haben, um der Randbedingung (2) gerecht zu werden. Wenn wir nämlich für $u_{i\sigma}$ und $u_{a\sigma}$ die durch (4) gegebenen Ausdrücke in (2) einsetzen, so erhalten wir

$$(5) \qquad g_\sigma=2\pi(\alpha-\beta)\mu_\sigma+(\alpha+\beta)\iint\limits_{(\Lambda)}\frac{\partial}{\partial n_\omega}\left(\frac{1}{r_{\sigma\omega}}\right)\mu_\omega\,d\omega.$$

Das ist aber eine gewöhnliche Integralgleichung von der Form

$$(6) \qquad f_\sigma=\mu_\sigma-\lambda\iint\limits_{(\Lambda)}K(\sigma,\omega)\,\mu_\omega\,d\omega, \qquad \text{wenn}$$

$$(6') \quad K(\sigma,\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_\omega}\left(\frac{1}{r_{\sigma\omega}}\right); \quad f_\sigma=\frac{g_\sigma}{2\pi(\alpha-\beta)}; \quad \lambda=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$$

gesetzt wird. Dabei nehmen wir $\alpha\neq\beta$ an, was ja bei den beiden wichtigsten Fällen der Randwertaufgabe des Innengebietes bzw. des Außengebietes erfüllt ist. Zusammenfassend erhalten wir den

Satz 1: *Es sei die verallgemeinerte erste Randwertaufgabe für die geschlossene Fläche Λ vorgelegt, eine derartige Lösung u_p der Laplaceschen Gleichung $\Delta u_p = 0$ (p nicht auf Λ) zu finden, daß deren innere und äußere Randwerte mit vorgeschriebenen Werten g_σ auf Λ durch die Relation*

$$(2) \qquad \alpha u_{i\sigma}+\beta u_{a\sigma}=g_\sigma$$

1) Zum Beweise sei z. B. auf Frank und v. Mises, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, Bd. I, S. 476ff., verwiesen, wo sich auch weitere Literaturangaben für diese Fragen finden.

verbunden sind. Machen wir für das gesuchte u_p den Ansatz (8) in Form eines Doppelbelegungspotentiales mit dem unbekannten Momente μ_ω, so genügt dieses μ der inhomogenen Integralgleichung zweiter Art

$$f_\sigma = \mu_\sigma - \lambda \iint\limits_{(A)} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_\omega} \left(\frac{1}{r_{\sigma\omega}}\right) \mu_\omega d\omega,$$

wo die Bedeutung von f_σ und λ aus (6′) zu entnehmen ist. Speziell liefert $\lambda = -1$ die erste Randwertaufgabe des Innengebietes mit den Randwerten $2\pi f_\sigma$, dagegen $\lambda = +1$ diejenige des Außengebietes mit den Randwerten $-2\pi f_\sigma$.

Der Kern $K(\sigma, \omega)$ ist nicht in σ und ω symmetrisch; denn bei $K(\sigma, \omega)$ ist die normale Ableitung längs der Normalen im Punkte ω, bei $K(\omega, \sigma)$ aber längs der in σ errichteten Normalen zu bilden.

Dieser zu $K(\sigma, \omega)$ transponierte Kern $K(\omega, \sigma)$ erscheint nun, wie wir sogleich sehen werden, gerade in der Integralgleichung, auf die wir die zweite Randwertaufgabe zurückführen können. Bei dieser handelt es sich darum, eine solche Lösung von (1) zu finden, welche die Randbedingung

$$\alpha \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right)_{i\sigma} + \beta \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right)_{a\sigma} = g_\sigma \tag{7}$$

erfüllt. Hierin sind wieder die zweite Randwertaufgabe des Innengebietes und des Außengebietes als die Spezialfälle $\alpha = 1, \beta = 0$ bzw. $\alpha = 0, \beta = 1$ enthalten. Machen wir hier den Ansatz in Form eines einfachen Potentiales

$$\bar{u}_p = \iint\limits_{(A)} \frac{1}{r_{p\omega}} \eta_\omega d\omega, \tag{8}$$

so ist wieder $\Delta u_p = 0$, wenn p nicht auf A liegt; das ergibt sich wiederum durch einfaches Differenzieren wie oben. Die durch (8) definierten Funktionen haben nun die Eigenschaft, daß ihre normale Ableitung beim Durchgange durch die Fläche A einen Sprung erfährt; es gilt[1]) nämlich

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right)_{i\sigma} = \iint\limits_{(A)} \frac{\partial}{\partial n_\sigma} \left(\frac{1}{r_{\omega\sigma}}\right) \eta_\omega d\omega - 2\pi\eta_\sigma \tag{9}$$

und

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right)_{a\sigma} = \iint\limits_{(A)} \frac{\partial}{\partial n_\sigma} \left(\frac{1}{r_{\omega\sigma}}\right) \eta_\omega d\omega + 2\pi\eta_\sigma.$$

---

1) Man vgl. z. B. das Lehrbuch von A. Korn, Potentialtheorie, 2 Bde.

Setzen wir diese Ausdrücke in (7) ein, so folgt

$$g_\sigma = -2\pi(\alpha - \beta)\eta_\sigma + (\alpha + \beta)\iint\limits_{(\Lambda)} \frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_{\omega\sigma}}\right)\eta_\omega d\omega, \qquad \text{oder}$$

(10) $$\bar{f}_\sigma = \eta_\sigma - \lambda \iint\limits_{(\Lambda)} K(\omega, \sigma)\,\eta_\omega d\omega,$$

wo der Kern $K(\sigma, \omega)$ genau derselbe ist wie oben und

(10′) $$\bar{f}_\sigma = -\frac{g_\sigma}{2\pi(\alpha - \beta)}; \quad \lambda = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$$

gesetzt ist. Damit haben wir den

Satz 2: *Es sei die verallgemeinerte zweite Randwertaufgabe für die geschlossene Fläche Λ vorgelegt, eine derartige Lösung $\bar{u}$ der Laplaceschen Gleichung $\Delta \bar{u}_p = 0$ (p nicht auf Λ) zu finden, daß deren innere und äußere normalen Ableitungen mit vorgeschriebenen Werten g_σ auf Λ durch die Relation*

(7) $$\alpha\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right)_{i\sigma} + \beta\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right)_{a\sigma} = g_\sigma$$

verbunden sind. Macht man für $\bar{u}$ den Ansatz (8) in Form eines gewöhnlichen Potentiales mit der unbekannten Belegungsdichte η_ω, so erhält man für dieses η die inhomogene Integralgleichung zweiter Art

$$\bar{f}_\sigma = \eta_\sigma - \lambda \iint\limits_{(\Lambda)} \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_{\omega\sigma}}\right)\eta_\omega d\omega,$$

wo die Bedeutung von $\bar{f}_\sigma$ und λ aus (10′) zu entnehmen ist. Speziell ergibt $\lambda = +1$ die zweite Randwertaufgabe des Innengebietes, $\lambda = -1$ die des Außengebietes.

Die beiden Integralgleichungen, auf deren Lösung wir hiermit die erste und die zweite Randwertaufgabe zurückgeführt haben, stehen also in derselben Beziehung zueinander wie die Gleichungen (1) und (1′) in § 4. Speziell also haben sie sicher dann eine eindeutig bestimmte Lösung, wenn die beiden homogenen Gleichungen

(11) $$\begin{cases} 0 = \mathsf{M}_\sigma - \lambda \iint\limits_{(\Lambda)} K(\sigma, \omega)\,\mathsf{M}_\omega d\omega, \\ 0 = \mathsf{H}_\sigma - \lambda \iint\limits_{(\Lambda)} K(\omega, \sigma)\,\mathsf{H}_\omega d\omega \end{cases}$$

keine Lösung besitzen. Sind dagegen die Gleichungen (11) durch

nicht identisch verschwindende Funktionen lösbar, so sind die inhomogenen Gleichungen (6) und (10) nur in besonderen Fällen lösbar.

Es läßt sich nun zeigen, daß für $\lambda = -1$ die homogenen Gleichungen (11) nicht eigentlich lösbar sind; d. h. die erste Randwertaufgabe des Innengebietes und die zweite des Außengebietes besitzen stets eine eindeutig bestimmte Lösung. Dagegen ist $\lambda = +1$ ein solcher Ausnahmewert, für den (11) nicht identisch verschwindende Lösungen gestattet. Und in der Tat sind die erste Randwertaufgabe des Außengebietes und die zweite des Innengebietes nur unter gewissen einschränkenden Bedingungen für g_a lösbar, wie auch in der Potentialtheorie gezeigt wird. Auf die nähere Durchführung dieser Einzelheiten müssen wir hier verzichten. (Näheres vgl. Frank und v. Mises, a. a. O., S. 491 ff.)

Fünftes Kapitel.

Ergänzungen.

Wir haben in den ersten vier Kapiteln von dem großen Gebiete der Integralgleichungen nur einige Abschnitte behandeln können, wobei wir die Auswahl nach dem Gesichtspunkte der Anwendbarkeit auf physikalische Probleme getroffen haben. Unberücksichtigt sind aus Raummangel geblieben die Integralgleichungen erster Art, die Volterraschen Integralgleichungen[1]), der engere Zusammenhang zwischen Differential- und Integralgleichungen[2]), die mathematischen Anwendungen auf Variationsrechnung und die Methode der unendlich vielen Variabeln[3]), und anderes mehr. Das Ziel dieses kleinen Buches soll ja aber auch nicht in einer möglichst umfangreichen Erfassung des Stoffes bestehen, sondern es soll in erster Linie das Interesse für diesen vielseitigen Gegenstand wecken und zum tieferen Studium anregen. Dazu aber müssen wir auf die übrige

---

1) V. Volterra, Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, Paris 1913.

2) Über diesen Gegenstand sei insbesondere eine neuere Arbeit von G. Kowalewski genannt, „Überführung linearer Differentialgleichungen in Integralgleichungen", *Ber. d. Sächs. Akad. d. Wissensch., Math. Phys. Kl.*, Bd. 80 (1928) S. 223—285.

3) D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 1912.

reichhaltige Literatur verweisen, die sich z. B. in dem sehr lesenswerten Enzyklopädieartikel von E. Hellinger und O. Toeplitz (*Encykl. II*, 3_2, 9) findet.

Hier wollen wir zum Abschluß nur noch den Grundgedanken der Fredholmschen Methode und den funktionentheoretischen Zusammenhang der verschiedenen Formen der Lösung der inhomogenen Integralgleichung zweiter Art kennenlernen.

§ 1. Die Fredholmsche Methode.[1])

Es sei $K(s, t)$ ein in s und t stetiger Kern, von dem wir aber Symmetrie nicht voraussetzen wollen. Bei der hier zu entwickelnden Methode, die Lösung von

$$(1) \qquad f(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \eta(t)\, dt$$

zu gewinnen, liegt die Idee zugrunde, daß ein bestimmtes Integral der Grenzwert einer gewissen endlichen Summe ist. Lediglich zur Erleichterung der Schreibweise im folgenden bezeichnen wir hier das Intervall mit $0 \ldots 1$ statt mit $a \ldots b$. Das bedeutet ja offenbar keine Einschränkung der Allgemeinheit; denn durch Einführung der neuen Variabeln $s^* = \frac{s-a}{b-a}$ und $t^* = \frac{t-a}{b-a}$ können wir stets zu dem speziellen Intervalle $0 \ldots 1$ kommen.

Der erwähnte fundamentale Satz der Integralrechnung lautet genauer: Es ist

$$\int_a^b F(\xi)\, d\xi = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} F(\xi_\nu)\, \delta_\nu,$$

wenn das Intervall $a \ldots b$ in die n Teilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ zerteilt wird und ξ_ν eine beliebige Stelle in δ_ν bedeutet; die Unterteilung ist dabei ganz beliebig, mit der einzigen Einschränkung, daß bei $n \to \infty$ jedes einzelne Teilintervall gegen Null strebt. (Geometrisch bedeutet dies die bekannte Tatsache, daß der Inhalt einer ebenen geschlossenen Fläche durch Rechtecke approximiert werden kann.) Von diesem Satze wollen wir in der Weise Gebrauch machen, daß wir in (1) das Integral durch eine endliche Summe von n Gliedern

1) Wegen der in diesem Paragraphen benutzten Determinantensätze vgl. man G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie. In diesem Lehrbuch gibt der Verfasser auch in § 180ff. eine ausgezeichnete Darstellung der Fredholmschen Theorie der Integralgleichungen.

ersetzen. Dann aber haben wir, entsprechend den gewählten Werten $t_1, t_2, \ldots t_n$, nur n Unbekannte noch zur freien Verfügung; wir können also nicht erwarten, daß wir eine Identität in s damit befriedigen können. Mit anderen Worten, wir müssen nun an Stelle der Funktion $f(s)$ ein System von n diskreten Funktionswerten treten lassen. Wählen wir speziell alle Intervalle gleich und legen wir den Variabelnwert jedesmal ans Ende des betreffenden Teilintervalles, also

$$\delta_\nu = \frac{1}{n}; \quad t_\nu = \frac{\nu}{n}; \quad s_\mu = \frac{\mu}{n} \quad (\nu, \mu = 1, 2 \ldots n),$$

so haben wir, wenn wir noch zur Abkürzung

$$(2) \qquad f\left(\frac{\mu}{n}\right) = f_\mu; \quad \eta\left(\frac{\nu}{n}\right) = \eta_\nu; \quad K\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\nu}{n}\right) = K_{\mu\nu}$$

setzen, an Stelle der Gleichung (1), d. h. der Identität in s, das System von n Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{cases} \eta_1 - \frac{\lambda}{n}[K_{11}\eta_1 + K_{12}\eta_2 + \cdots + K_{1n}\eta_n] = f_1, \\ \eta_2 - \frac{\lambda}{n}[K_{21}\eta_1 + K_{22}\eta_2 + \cdots + K_{2n}\eta_n] = f_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \eta_n - \frac{\lambda}{n}[K_{n1}\eta_1 + K_{n2}\eta_2 + \cdots + K_{nn}\eta_n] = f_n, \end{cases}$$

oder kürzer

$$(3') \qquad \eta_\mu - \frac{\lambda}{n}[K_{\mu 1}\eta_1 + \cdots + K_{\mu n}\eta_n] = f_\mu \quad (\mu = 1, 2 \ldots n)$$

für die n Unbekannten $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$.

Die Anwendung der Determinantentheorie auf die Auflösung eines Systems von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten lehrt folgendes: Das Gleichungssystem (3) hat nur dann sicher eine (eindeutig bestimmte) Lösung, wenn die Determinante der Koeffizienten

$$(4) \quad D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{n}K_{11} & -\frac{\lambda}{n}K_{12} \ldots & -\frac{\lambda}{n}K_{1n} \\ -\frac{\lambda}{n}K_{21} & 1 - \frac{\lambda}{n}K_{22} \ldots & -\frac{\lambda}{n}K_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -\frac{\lambda}{n}K_{n1} & -\frac{\lambda}{n}K_{n2} \ldots & 1 - \frac{\lambda}{n}K_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist; das wollen wir zunächst voraussetzen. Ferner sind die Werte der

Lösung $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ nach der Cramerschen Regel gegeben durch

$$(5) \qquad \eta_m = \frac{\Delta_n^{(m)}(\lambda; f)}{D_n(\lambda)},$$

wo $\Delta_n^{(m)}(\lambda; f)$ aus $D_n(\lambda)$ dadurch entsteht, daß wir die Elemente der m-ten Spalte ersetzen durch $f_1, f_2, \ldots f_n$, also

$$(5') \qquad \Delta_n^{(m)}(\lambda; f) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{n} K_{11} \ldots - \frac{\lambda}{n} K_{1, m-1} f_1 - \frac{\lambda}{n} K_{1, m+1} \ldots & - \frac{\lambda}{n} K_{1n} \\ - \frac{\lambda}{n} K_{21} \ldots - \frac{\lambda}{n} K_{2, m-1} f_2 - \frac{\lambda}{n} K_{2, m+1} \ldots & - \frac{\lambda}{n} K_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ - \frac{\lambda}{n} K_{n1} \ldots - \frac{\lambda}{n} K_{n, m-1} f_n - \frac{\lambda}{n} K_{n, m+1} \ldots & 1 - \frac{\lambda}{n} K_{nn} \end{vmatrix}$$

Der Grundgedanke ist nun einfach dieser: Die Funktionen $D_n(\lambda)$ bzw. $\Delta_n^{(m)}(\lambda; f)$ sind ganze rationale Funktionen n-ten bzw. $(n-1)$-ten Grades. Beim Grenzübergange $n \to \infty$ werden daraus formal unendliche Potenzreihen. Es ist dann die Aufgabe des Konvergenzbeweises, zu zeigen, daß diese Potenzreihen konvergieren; sie werden sich sogar als für alle λ konvergent erweisen; d. h. die Grenzfunktionen, denen $D_n(\lambda)$ und $\Delta_n^{(m)}(\lambda; f)$ zustreben, sind ganze transzendente Funktionen von λ (im Sinne der klassischen Funktionentheorie). Die Polynome $D_n(\lambda)$ und $\Delta_n^{(m)}(\lambda; f)$ haben folgende Gestalt:

$$(6) \qquad D_n(\lambda) = d_0^{(n)} + d_1^{(n)} \lambda + \cdots + d_n^{(n)} \lambda^n \qquad \text{bzw.}$$

$$(7) \qquad \Delta_n^{(m)}(\lambda; f) = c_0^{(n)} + c_1^{(n)} \lambda + \cdots + c_{n-1}^{(n)} \lambda^{n-1}.$$

In (6) hängen die Koeffizienten $d_\nu^{(n)}$ nur ab von n und den Werten $K_{\varrho\sigma}$, und es ist speziell

$$(6') \qquad d_0^{(n)} = 1.$$

In (7) dagegen hängen die Koeffizienten $c_\nu^{(n)}$ außer von n und den $K_{\varrho\sigma}$ auch noch ab von m und den Werten $f_1, f_2, \ldots f_n$, wie wir es schon in der Bezeichnung $\Delta_n^{(m)}(\lambda; f)$ zum Ausdruck bringen. Speziell erhalten wir das einzige λ nicht enthaltende Glied, wenn wir f_m (das f der Hauptdiagonale) und aus den übrigen Elementen der Hauptdiagonale jedesmal die Eins nehmen; alle anderen Glieder der Determinante enthalten den Faktor λ mindestens in der ersten Potenz. Es ist also

$$(7') \qquad c_0^{(n)} = f_m.$$

Die obige Behauptung lautet demnach

$$(8)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} D_n(\lambda) \qquad = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \lambda^\nu, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n^{(m)}(\lambda; f) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \lambda^\nu \end{cases}$$

sind überall konvergente Potenzreihen.

Nehmen wir dieses Resultat einmal vorweg, so haben wir folgendes: Es sei die Stelle s für jedes n in dem Intervalle $\frac{m-1}{n} \ldots \frac{m}{n}$ gelegen (m hängt also von n ab!). Dann wird

$$(9)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_m = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{m}{n}\right) = f(s), \\ \lim\limits_{n\to\infty} \eta_m = \lim\limits_{n\to\infty} \eta\left(\frac{m}{n}\right) = \eta(s), \end{cases}$$

und

$$(10)\qquad \eta(s) = \frac{f(s) + c_1(s)\lambda + c_2(s)\lambda^2 + \cdots}{1 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 + \cdots}$$

stellt sich dar als Quotient zweier ganzer transzendenter Funktionen von λ. Setzen wir in (10) $\lambda = 0$, so wird $\eta(s) = f(s)$, wie es nach (1) auch sein muß.

Wir haben noch den ausstehenden Konvergenzbeweis zu führen. Dazu überlegen wir zunächst, welche Gestalt der Koeffizient $d_\nu^{(n)}$ von λ^ν in dem Polynome $D_n(\lambda)$ hat. Aus (4) ersehen wir, daß außer den Gliedern der Hauptdiagonale alle den Faktor $\frac{\lambda}{n}$ enthalten. Die Glieder mit der Potenz λ^ν erhalten wir, indem wir auf alle Arten $n - \nu$ Elemente der Hauptdiagonale und von diesen (und nur diesen) den ersten Summanden 1 wählen. Nach dem allgemeinen Laplaceschen Entwicklungssatze sind diese Glieder jeweils zu multiplizieren mit derjenigen Determinante ν-ter Ordnung, die übrigbleibt, wenn die Zeilen und Spalten gestrichen werden, welche die $n - \nu$ herausgegriffenen Elemente enthalten. Die Indizes dieser Determinanten ν-ter Ordnung wollen wir mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\nu$ bezeichnen. So erhalten wir als Faktor von λ^ν in (6) den Wert

$$(6')\qquad d_\nu^{(n)} = \frac{(-1)^\nu}{n^\nu} \frac{1}{\nu!} \sum_{\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\nu} \cdots \sum \begin{vmatrix} K_{\varrho_1\varrho_1} & K_{\varrho_1\varrho_2} \ldots K_{\varrho_1\varrho_\nu} \\ K_{\varrho_2\varrho_1} & K_{\varrho_2\varrho_2} \ldots K_{\varrho_2\varrho_\nu} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ K_{\varrho_\nu\varrho_1} & K_{\varrho_\nu\varrho_2} \ldots K_{\varrho_\nu\varrho_\nu} \end{vmatrix},$$

Den Faktor $\frac{1}{\nu!}$ müssen wir vor die ν-fache Summe setzen; denn wenn die ϱ unabhängig voneinander die ν übriggebliebenen Indizes durchlaufen, so tritt $\nu!$-mal dieselbe Determinante auf, nur mit Permutation der Zeilen und entsprechend der Spalten untereinander.

Lassen wir nun $n \to \infty$ rücken, so wird, wenn wir die ν Faktoren $\frac{1}{n}$ auf die ν Summen verteilen,

$$(8') \quad d_\nu = \lim_{n\to\infty} d_\nu^{(n)} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int_0^1 \cdots \overset{(\nu)}{} \int_0^1 \begin{vmatrix} K(\varrho_1, \varrho_1) \dots K(\varrho_1, \varrho_\nu) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ K(\varrho_\nu, \varrho_1) \dots K(\varrho_\nu, \varrho_\nu) \end{vmatrix} d\varrho_1 \dots d\varrho_\nu$$

der Koeffizient von λ^ν in der Potenzreihe (8). Um die Konvergenz dieser Potenzreihe nachzuweisen, benutzen wir einen berühmten Determinantensatz von *Hadamard*.[1]) Dieser besteht in der allgemein gültigen Ungleichung

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}^2 \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{1\nu}^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{2\nu}^2\right) \cdots \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu}\right).$$

Ist nun M der Maximalwert von $K(s, t)$, so ist jede der in (6″) stehenden Determinanten wegen (11)

$$\text{abs.} \begin{vmatrix} K_{\varrho_1\varrho_1} \dots K_{\varrho_1\varrho_\nu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ K_{\varrho_\nu\varrho_1} \dots K_{\varrho_\nu\varrho_\nu} \end{vmatrix} \leqq \sqrt{(\nu \cdot M^2)^\nu} = M^\nu \sqrt{\nu^\nu}.$$

Also wird

$$(12) \qquad |d_\nu| \leqq \frac{M^\nu \sqrt{\nu^\nu}}{\nu!}.$$

Hieraus folgt, daß (6) für jedes λ sogar absolut konvergent ist; denn es ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder, wegen (12),

$$\frac{|d_{\nu+1}\lambda^{\nu+1}|}{|d_\nu \lambda^\nu|} \leqq M|\lambda| \frac{1}{\nu+1} \frac{\sqrt{(\nu+1)^{\nu+1}}}{\sqrt{\nu^\nu}} = M|\lambda| \frac{1}{\sqrt{\nu+1}} \cdot \sqrt{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu},$$

und da $\lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = e$ ist, strebt dieser Ausdruck mit wachsendem ν wegen des Faktors $\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}$ sogar gegen Null.

---

1) Vgl. z. B. Kowalewski, a. a. O. § 180.

Mit derselben Überlegung läßt sich die Konvergenz der Zähler-Potenzreihe einsehen, so daß wir den folgenden Satz haben:

Satz 1: *Ersetzt man in der vorgelegten Gleichung* (1) *das Integral durch eine endliche Summe und demgemäß die Identität in s durch ein System von endlich vielen Gleichungen* (3), *so ist die Lösung dieses Systems gegeben durch* (5). *Hieraus ergibt sich die gesuchte Lösung* $\eta(s)$ *von* (1) *durch den Grenzübergang* $n \rightarrow \infty$ *in der Gestalt* (10), *wo Zähler und Nenner überall konvergente Potenzreihen, also ganze transzendente Funktionen von* λ *sind. Voraussetzung für* (10) *ist nur, daß* λ *nicht gerade Nullstelle der Nennerfunktion ist.*

(Es bedarf, streng genommen, eines besonderen Beweises, daß die Grenzfunktion, der die Lösungen von (3) zustreben, auch wirklich die Integralgleichung löst.)

Bei den bisherigen Betrachtungen hatten wir stets vorausgesetzt, daß die Determinante der Koeffizienten in (3), d. h. die Funktion $D_n(\lambda) \neq 0$ ist. Wir wollen uns jetzt umgekehrt noch kurz mit den Nullstellen von $D_n(\lambda)$ beschäftigen. Dabei wollen wir uns jedoch auf den Fall symmetrischer Kerne beschränken. Das bedeutet, daß in der Determinante (4) die Elemente spiegelbildlich zur Hauptdiagonale gleich sind, also

$$-\frac{\lambda}{n} K_{\mu\nu} = -\frac{\lambda}{n} K_{\nu\mu}.$$

Dann aber ist

$$D_n(\lambda) = 0 \tag{13}$$

die Säkulargleichung; denn wenn wir bei der Determinante in (4) aus jeder Spalte den Faktor $-\frac{\lambda}{n}$ herausziehen und $-\frac{n}{\lambda} = z$ setzen, so geht (13) über in die bekannte Form

$$\begin{vmatrix} K_{11}+z & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22}+z & \dots & K_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn}+z \end{vmatrix} = 0. \tag{13'}$$

Diese Gleichung aber hat, wie in der Determinantentheorie gezeigt wird[1]), wegen der Annahme der Kernsymmetrie nur reelle Wurzeln; dasselbe gilt also auch von der Gleichung (13). Deren Wurzeln seien

$$\lambda_1^{(n)},\ \lambda_2^{(n)},\ \dots\ \lambda_n^{(n)}.$$

Was besagt das nun in unserem Zusammenhange mit den Integralgleichungen? (13) ist die notwendige und hinreichende Bedingung

1) Vgl. z. B. Kowalewski, a. a. O. § 53 oder § 54.

dafür, daß das homogene Gleichungssystem

$$(14)\quad \begin{cases} \varphi_1 - \frac{\lambda}{n}[K_{11}\varphi_1 + K_{12}\varphi_2 + \cdots + K_{1n}\varphi_n] = 0, \\ \varphi_2 - \frac{\lambda}{n}[K_{21}\varphi_1 + K_{22}\varphi_2 + \cdots + K_{2n}\varphi_n] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n - \frac{\lambda}{n}[K_{n1}\varphi_1 + K_{n2}\varphi_2 + \cdots + K_{nn}\varphi_n] = 0 \end{cases}$$

eine nichttriviale Lösung besitzt (d. h. eine solche, bei der nicht alle $\varphi_\mu = 0$ sind). Lassen wir nun $n \to \infty$ rücken, wobei aber stets (13) bewahrt bleiben soll, so gehen $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}$ usw. über in die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ der ganzen transzendenten Funktion $D(\lambda)$, und (14), worin λ jetzt immer eine der Nullstellen von $D_n(\lambda)$ sein soll, wird bei diesem Grenzübergange äquivalent der homogenen Integralgleichung

$$(15)\qquad \varphi(s) - \lambda_\varkappa \int_0^1 K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 0.$$

Wir erkennen so den

Satz 2: *Unter der Voraussetzung eines symmetrischen Kernes sind die Nullstellen der ganzen transzendenten Funktion $D(\lambda)$ sämtlich reell, und zwar sind sie genau die früher behandelten Eigenwerte des Kernes $K(s,t)$. Die zugehörigen Eigenfunktionen ergeben sich als Grenzwerte der Auflösungen des Systems homogener linearer Gleichungen* (14).

Wir wollen hierbei beachten, daß, selbst wenn die hier nur angedeuteten Grenzübergänge streng durchgeführt werden, aus diesen und dem Satz 2 nicht etwa schon ohne weiteres ein neuer Existenzbeweis für die Eigenwerte und Eigenfunktionen eines symmetrischen Kernes erbracht wäre. Es könnte an sich sehr wohl der Fall eintreten, daß die Grenzfunktion $D(\lambda)$ von $D_n(\lambda)$ überhaupt keine Nullstellen besitzt; denn es gibt ganze transzendente Funktionen ohne Nullstellen, wie das Beispiel der Funktion e^λ zeigt.

Die vorstehenden Überlegungen haben uns Aufschluß darüber gegeben, wie man nach den Fredholmschen Gedankengängen zu der Lösung der inhomogenen Gleichung (1) im Falle $D(\lambda) \neq 0$, d. h. λ kein Eigenwert, und der homogenen Gleichung (15) im Falle $D(\lambda) = 0$, d. h. $\lambda = \lambda_\varkappa$ ein Eigenwert, gelangt. Auch die Frage nach der Lösung der speziellen inhomogenen Gleichung

$$f(s) = \eta(s) - \lambda_\varkappa \int_0^1 K(s,t)\,\eta(t)\,dt,$$

wo also $\lambda_\varkappa$ ein Eigenwert ist, können wir auf diesem Wege beant-

worten. Zunächst sehen wir, daß i. a. keine Lösung existiert; denn i. a. hat dann das betreffende endliche Gleichungssystem (3) mit $\lambda = \lambda_\varkappa^{(n)}$ wegen des Verschwindens der Koeffizientendeterminante keine Lösung. Damit dies doch der Fall ist und dann in der Grenze auch so bleibt, müssen die $f_1, f_2, \ldots f_n$, d. h. die Funktion $f(s)$ noch gewisse Nebenbedingungen erfüllen. Die nähere Ausführung dieses Gedankens führt zu genau denselben Bedingungen, wie wir sie im Kap. II, § 4, Satz 2, kennengelernt haben. Doch wollen wir uns hier mit diesem Hinweise begnügen, da wir zur Durchführung noch weiter auf die Determinantentheorie zurückgreifen müßten, ohne einen für unsere Zwecke wesentlich neuen Gedanken kennenzulernen.

§ 2. Die funktionentheoretischen Zusammenhänge der verschiedenen Lösungsformen.

In diesem Paragraphen wollen wir noch einmal, unter Beschränkung auf symmetrische Kerne, die verschiedenen Lösungsformen der Integralgleichung

(1) $$f(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\eta(t)\,dt$$

zusammenstellen und ihre inneren Zusammenhänge beleuchten. Dabei soll λ die Hauptvariable von $\eta(s;\lambda)$ sein. Denn wenn uns auch bei der ursprünglichen Problemstellung, nämlich (1) identisch in s zu lösen, λ nur als Parameter entgegentritt, während s im Vordergrunde steht — wir haben ja deshalb meist nur $\eta(s)$ geschrieben —, so kehrt sich dieses (an sich äußerliche) Verhalten gerade um, wenn wir die verschiedenen Formen der Darstellung von $\eta(s)$ betrachten; s erscheint dabei gewissermaßen nur als Parameter. Deshalb wollen wir in diesem Paragraphen $\eta(\lambda)$ schreiben, weil es uns eben hier nur auf die Abhängigkeit von λ ankommt. Wir haben folgende drei Hauptdarstellungsformen für $\eta(\lambda)$ gefunden:

1. Die C. Neumannsche Reihe

(2) $$\eta(\lambda) = A_0(s) + A_1(s)\lambda + A_2(s)\lambda^2 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(s)\lambda^\nu.$$

2. Die Fredholmsche Lösung

(3) $$\eta(\lambda) = \frac{f(s) + c_1(s)\lambda + c_2(s)\lambda^2 + \cdots}{1 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 + \cdots} = \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(s)\lambda^\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu\lambda^\nu} = \frac{g_1(\lambda)}{g_2(\lambda)},$$

wo $g_1(\lambda)$ und $g_2(\lambda)$ überall konvergente Potenzreihen, d. h. ganze transzendente Funktionen von λ sind.

3. Die E. Schmidtsche Auflösungsformel

$$\eta(\lambda) = f(s) + \lambda \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{\gamma_\varkappa \varphi_\varkappa(s)}{\lambda_\varkappa - \lambda}. \tag{4}$$

Das sind also nur verschiedene Formen ein und derselben analytischen Funktion $\eta(\lambda)$, deren Argument λ wir in diesem Zusammenhange als komplexe Größe ansehen wollen, wenn uns bisher auch nur die reellen Werte interessiert haben. Daß $\eta(\lambda)$ tatsächlich eine analytische Funktion ist, lehrt schon (2). Die Neumannsche Reihe ist die Taylorsche Entwicklung von $\eta(\lambda)$ in der Umgebung des Nullpunktes; sie stellt also, im Weierstraßschen Sinne, das Funktionselement $\eta(\lambda \mid 0)$ dar. Das Konvergenzgebiet von (2) ist der Kreis um den Nullpunkt, der durch die 0 zunächst gelegene singuläre Stelle von $\eta(\lambda)$ hindurchgeht. Um aus (2) Aufschluß über das weitere Verhalten der Funktion $\eta(\lambda)$ außerhalb dieses Konvergenzkreises zu erhalten, müßten wir deren analytische Fortsetzung untersuchen. Wir haben es aber hier viel einfacher, indem wir (3) und (4) heranziehen.

Die Darstellung (3) lehrt uns, daß $\eta(\lambda)$ als Quotient zweier ganzer transzendenter Funktionen eine meromorphe Funktion ist; d. h. sie hat im Endlichen als singuläre Stellen nur Pole, nämlich die Nullstellen der Nennerfunktion $g_2(\lambda)$. Die meromorphen Funktionen

$$M(\lambda) = \frac{G_1(\lambda)}{G_2(\lambda)}$$

sind die Verallgemeinerung der rationalen Funktionen und unterscheiden sich von diesen nur durch das Verhalten im Unendlichen, wo die meromorphen Funktionen eine wesentlich singuläre Stelle haben, während die rationalen dort höchstens polar singulär werden. Ebenso wie die rationalen Funktionen gestatten auch die meromorphen eine Partialbruchzerlegung; nur ist hier besondere Vorsicht geboten, weil i. a. die Nennerfunktion unendlich viele Nullstellen hat; infolgedessen steht dann in der formal gebildeten Partialbruchzerlegung eine unendliche Reihe, die i. a. gar nicht konvergent ist. Man verdankt Mittag-Leffler den Ausweg, der durch additive konvergenzerzeugende Zusatzfunktionen zum Ziele führt. Der Mittag-Lefflersche Satz lautet: *Jede meromorphe Funktion $M(\lambda)$ läßt sich in der Form*

$$M(\lambda) = G(\lambda) + H_0(\lambda) + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} [H_\varkappa(\lambda) + h_\varkappa(\lambda)] \tag{5}$$

darstellen, wo $G(\lambda)$ *eine ganze transzendente Funktion bedeutet und die* $H_\varkappa(\lambda)$ *die sogenannten Hauptteile von* $M(\lambda)$ *sind, d. h. die Bestandteile der Laurentschen Entwicklung, welche die negativen Potenzen enthalten, also, wenn* $\lambda_\varkappa$ *ein Pol* $\alpha_\varkappa$*-ter Ordnung ist,*

$$(5') \qquad H_\varkappa(\lambda) = \frac{c^{(\varkappa)}_{-\alpha_\varkappa}}{(\lambda-\lambda_\varkappa)^{\alpha_\varkappa}} + \cdots + \frac{c^{(\varkappa)}_{-2}}{(\lambda-\lambda_\varkappa)^2} + \frac{c^{(\varkappa)}_{-1}}{\lambda-\lambda_\varkappa}.$$

Die $h_\varkappa(\lambda)$ *sind ganze rationale Funktionen, die Mittag-Lefflerschen Zusatzfunktionen.* Das wesentliche des in Rede stehenden Satzes ist eben, daß diese Zusatzfunktionen stets so ausgewählt werden können, daß (5) konvergent wird; und zwar gleichmäßig konvergent in jedem beliebigen abgeschlossenen Gebiete der Ebene, das keinen der Pole enthält. Bezüglich der Zusatzfunktionen gilt noch folgendes[1]): Wenn $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_\varkappa|^n}$ konvergent ist und alle Pole gleiche Ordnung α haben, so kommt man bei $n > \alpha$ für die $h_\varkappa(\lambda)$ aus mit ganzen rationalen Funktionen $(n-\alpha-1)$-ter Ordnung (während im allgemeinen Falle die Ordnung der $h_\varkappa(\lambda)$ mit wachsendem $\varkappa$ auch mehr und mehr wachsen wird).

Da (8) uns die Lösung $\eta(\lambda)$ als meromorphe Funktion von λ aufweist, so muß also für diese der eben genannte Satz anwendbar sein. In der Tat gibt uns die Schmidtsche Auflösungsformel gerade die Mittag-Lefflersche Partialbruchzerlegung von $\eta(\lambda)$; nur schreiben wir dazu deutlicher (4) ein klein wenig anders, um den Faktor λ vor der Summe fortzuschaffen, nämlich in der Form

$$(4') \qquad \eta(\lambda) = f(s) + \sum_{\varkappa=1}^{\infty}\left[\frac{-\gamma_\varkappa \lambda_\varkappa \varphi_\varkappa(s)}{\lambda-\lambda_\varkappa} - \gamma_\varkappa \varphi_\varkappa(s)\right].$$

Aus (4') erkennen wir sogleich die Übereinstimmung mit (5). Die ganze transzendente Funktion $G(\lambda)$ ist hier eine Konstante, nämlich $f(s)$. (s ist ja jetzt nur Parameter!) Die Pole sind sämtlich von erster Ordnung, und die Hauptteile sind

$$H_\varkappa(\lambda) = \frac{-\gamma_\varkappa \lambda_\varkappa \varphi_\varkappa(s)}{\lambda-\lambda_\varkappa};$$

die konvergenzerzeugenden Zusatzfunktionen endlich sind hier

$$h_\varkappa(\lambda) = -\gamma_\varkappa \varphi_\varkappa(s),$$

also von nullter Ordnung in λ. Das steht in Übereinstimmung mit dem obigen Ergänzungssatze der Mittag-Lefflerschen Partial-

1) Vgl. z.B. H. Burkhardt, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen, Bd. I_2 (3. Aufl. 1908) S. 166.

bruchzerlegung; denn, wie wir schon im Anfange von Kap. II sahen, ist $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\varkappa^2}$ konvergent, d. h. $n = 2$, und alle Pole haben die gleiche Ordnung $\alpha = 1$; also genügen Zusatzfunktionen von $(2 - 1 - 1)$-ter, d. h. nullter Ordnung. Daß diese aber i. a. wirklich nötig sind, geht daraus hervor, daß $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} H_\varkappa(\lambda)$ allein in unserem Falle nur dann konvergent ist, wenn die Entwicklung

$$f(s) = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \gamma_\varkappa \varphi_\varkappa(s)$$

gilt (vgl. S. 59).

Zusammenfassend können wir also den Satz aussprechen:

Satz: *Die Lösung $\eta(\lambda)$ der Integralgleichung* (1) *mit symmetrischem Kerne, betrachtet als Funktion der komplexen Variabeln λ, ist eine meromorphe Funktion; sie hat nur Pole erster Ordnung, und zwar sind das gerade die Eigenwerte des Kernes. Die Neumannsche Reihe ist die Taylorsche Entwicklung an der regulären Stelle* 0; *die Fredholmsche Lösung gibt ihre Darstellung als Quotient zweier ganzer transzendenter Funktionen; die Schmidtsche Formel in der Gestalt* (4′) *ist ihre Mittag-Lefflersche Partialbruchzerlegung; deren konvergenzerzeugende Zusatzglieder sind hinsichtlich λ Konstanten, und zwar sind es jeweils gerade die entsprechenden Glieder der formal gebildeten Reihenentwicklung der freien Funktion $f(s)$ nach den Eigenfunktionen des Kernes.*

Als Folgerung aus diesem Satze können wir sofort den Konvergenzradius der Neumannschen Reihe angeben; da nämlich die Singularitäten von $\eta(\lambda)$ mit den Eigenwerten des Kernes identisch sind, so ist

$$R = |\lambda_1|$$

der Konvergenzradius der Taylorschen Entwicklung um den Nullpunkt, in Übereinstimmung mit Satz 2, S. 90. Ferner können wir noch über die Grenzfunktion $D(\lambda)$ der Fredholmschen Theorie, die mit dem $g_2(\lambda)$ in (8) identisch ist, folgern, daß sie nur einfache Nullstellen besitzt; denn ihre Nullstellen ergeben die Pole von $\eta(\lambda)$, und diese sind, wie aus (4′) ersichtlich, von erster Ordnung. Es kann auch nicht so sein, daß $g_2(\lambda)$ mehrfache Nullstellen besitzt, die sich gegen gleiche von $g_1(\lambda)$ fortheben, so daß im ganzen nur einfache Nullstellen übrig bleiben; denn es ist $g_2(\lambda)$ von der Wahl der freien Funktion $f(s)$ unabhängig, während diese gerade wesentlich $g_1(\lambda)$ bestimmt, und eine geeignete Änderung von $f(s)$ wird auch die Nullstellen von $g_1(\lambda)$ abändern.

5294